Exemples 4

1) $AB = |z_{\vec{AB}}| = |z_B - z_A|$

$= |(6+8i)-(-6+2i)| = |12+6i|$

$= \sqrt{12^2+6^2} = \sqrt{180} = 3\sqrt{20} = 6\sqrt{5}$

$AC = |z_{\vec{AC}}| = |z_C - z_A| = |-10i+6-2i|$

$= |6-12i| = \sqrt{36+144} = 6\sqrt{5}$

$BC = |z_{\vec{BC}}| = |z_C - z_B| = |-10i-6-8i|$

$= |-6-18i| = \sqrt{36+324} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$

or $BC^2 = 360$ et $AB^2 + AC^2 = 180 + 180 = 360$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.
De plus $AC = AB$, le triangle ABC est isocèle en A.

3]
$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1+2i+4-i}{-5+4i+4-i} = \frac{3+i}{-1+3i}$$
$$= \frac{(3+i)(-1-3i)}{1+9} = \frac{-3-9i-i+3}{10}$$
$$= -i$$

or $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{|z_{\vec{AB}}|}{|z_{\vec{AC}}|} = \frac{AB}{AC}$

et $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |-i| = 1$

Donc $\frac{AB}{AC} = 1$ et $AB = AC$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A)$$
$$= \arg z_{\vec{AB}} - \arg z_{\vec{AC}}$$
$$= (\vec{u}, \vec{AB}) - (\vec{u}, \vec{AC})$$
$$= (\vec{u}, \vec{AB}) + (\vec{AC}, \vec{u})$$
$$= (\vec{AC}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{AB})$$
$$= (\vec{AC}, \vec{AB})$$

or $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$

Donc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

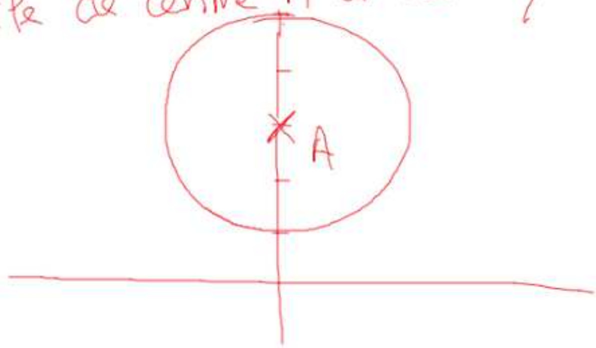
5] $|z - 3i| = 2 \iff |z - z_A| = 2$ avec $z_A = 3i$

$\iff |z_M - z_A| = 2$

$\iff |z_{\overrightarrow{AM}}| = 2$

$\iff AM = 2$

L'ensemble des points M cherché est le cercle de centre A et de rayon 2.



7) $|z-1+4i| = |z+3+i|$

$\iff |z - z_A| = |z - z_B|$ avec $z_A = 1-4i$

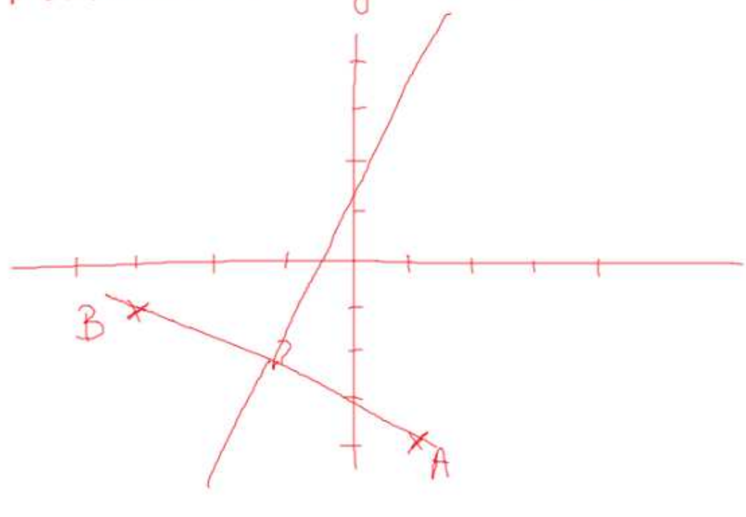
$z_B = -3-i$

$\iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$

$\iff |z_{\vec{AM}}| = |z_{\vec{BM}}|$

$\iff AM = BM$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].

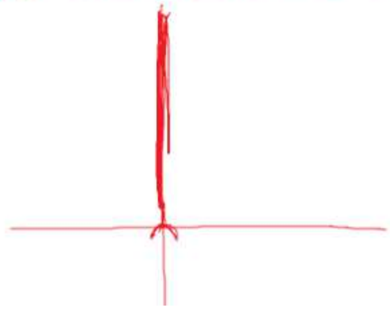


g) $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \iff \arg(z_M - z_O) = \frac{\pi}{2}$

$\iff \arg(z_{\vec{OM}}) = \frac{\pi}{2}$

$\iff (\vec{u}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{2}.$

l'ensemble des points M cherché est la demi-droite ouverte d'origine O et passant par le point de coordonnées $(0,1)$



11) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC})$

$= -(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC})$

$= -\arg z_{\overrightarrow{AB}} + \arg z_{\overrightarrow{AC}}$

$= \arg \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$

or $\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{4+11i-1-2i}{5+4i-1-2i} = \dfrac{3+9i}{4+2i}$

$= \dfrac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}$

$= \dfrac{12-6i+36i+18}{20} = \dfrac{30+30i}{20}$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$

Donc $\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\dfrac{3}{2}(1+i)\right) = \arg\dfrac{3}{2} + \arg(1+i)$

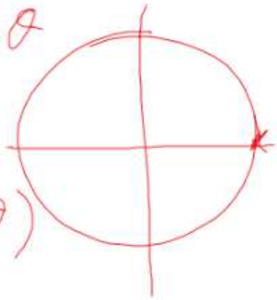
$= 0 + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}.$

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}$

Notation : $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

$$(e^{i\theta})' = (\cos\theta + i\sin\theta)'$$

$$= -\sin\theta + i\cos\theta$$



$$= i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= ie^{i\theta}$$

$[r,\theta]$ se note $re^{i\theta}$

$$[r,\theta]\times[r',\theta'] = [rr',\theta+\theta']$$

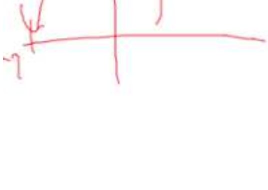
$$re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

Exemples 5

1) $z_1 = e^{-\frac{i\pi}{2}}$ donc $|z_1| = 1$

$\arg(z_1) = -\frac{\pi}{2}$

$$z_2 = -2e^{-\frac{i\pi}{4}} = 2\times(-1)e^{-\frac{i\pi}{4}}$$



$$= 2\times e^{i\pi}e^{-\frac{i\pi}{4}} = 2e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

donc $|z_2| = 2$

$\arg(z_2) = \frac{3\pi}{4}$

Pour tout θ réel $\quad |e^{i\theta}| = 1$

$$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$
$$= \sqrt{1} = 1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$z_3 = -4e^{-4i\pi} = 4e^{i\pi}e^{-4i\pi}$$
$$= 4e^{-3i\pi} = 4e^{i\pi} \quad \text{donc } |z_3| = 4$$
$$\arg(z_3) = \pi$$

$$z_4 = -ie^{i\pi} = 1e^{-\frac{i\pi}{2}}e^{i\pi} = e^{\frac{i\pi}{2}}$$
$$\text{donc } |z_4| = 1$$
$$\arg(z_4) = \frac{\pi}{2}$$