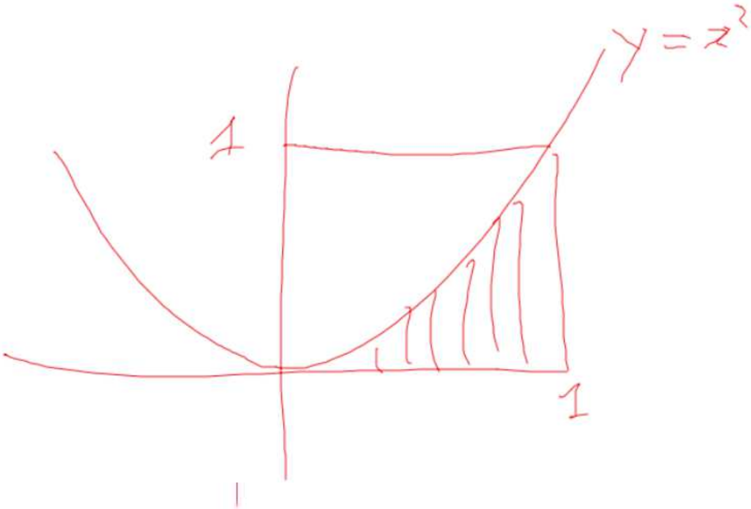
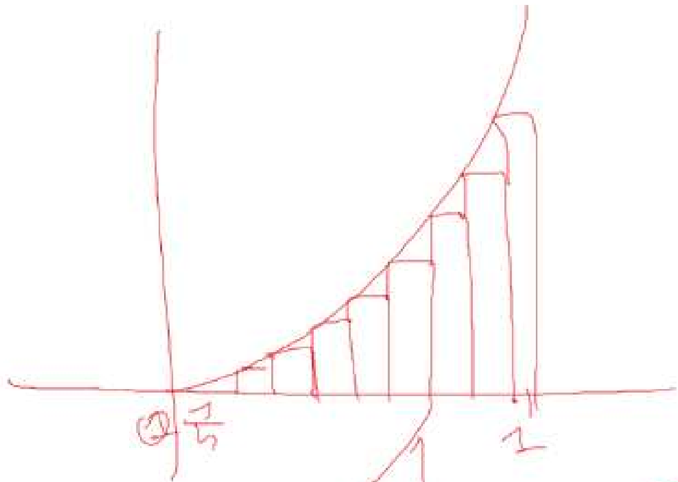
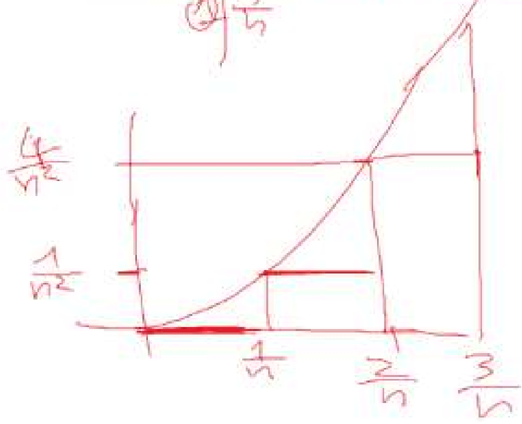
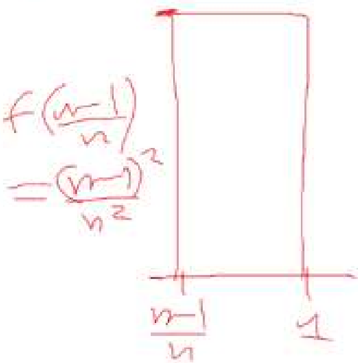

$y = x^2$
1
1


0
$\frac{1}{n}$
1


$\frac{4}{n^2}$
$\frac{1}{n^2}$
$\frac{1}{n}$
$\frac{2}{n}$
$\frac{3}{n}$


$f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2}$
$\frac{n-1}{n}$
1

$$\frac{1}{n}\times\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\times\frac{4}{n^2}+\dots+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1+4+9+\dots+(n-1)^2}{n^3}$$

or $1+2^2+3^2+\dots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$$=\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^3}=\frac{(n^2-n)(2n-1)}{6n^3}$$

$$=\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}$$

$$=\frac{2n^3\left(1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)}{6n^3}$$

$$=\frac{1-3/2n+1/2n^2}{3}\longrightarrow\frac{1}{3}$$

$$x^2 \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{h(x)} \qquad h(1)-h(0)=\frac{1}{3}$$

$$\begin{tikzcd} x^2 \arrow[r, bend left, "\text{primitive}"] & x^3/3 \arrow[l, bend left, "\text{dérivée}"] \end{tikzcd}$$

Exemple 1 On notera F une primitive de f.

1) $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 7x + 10$

3) L'ensemble de définition est $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Sur $]0; +\infty[$ $F(x) = -\frac{1}{x} + \ln x + 14$

Sur $]-\infty; 0[$ $F(x) = \frac{-1}{x} + \ln(-x) + 25$

5) $F(x) = \sin x + \frac{2}{3}\cos(3x) - \pi$

$(\cos(3x))' = -3\sin(3x)$

$\left(\frac{1}{3}\cos(3x)\right)' = -\sin(3x)$

$\left(\frac{2}{3}\cos(3x)\right)' = -2\sin(3x)$

7) $f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

L'ensemble de définition est $D_f =]0; +\infty[$

$F(x) = 2\sqrt{x}$

9) $f_9(x) = \frac{5}{x^3}$

L'ensemble de définition de f_9 est $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$f_9(x) = 5x^{-3}$

Sur $]0; +\infty[$ $F(x) = 5 \times \frac{1}{-2} x^{-2}$

$= -\frac{5}{2}x^{-2}$

$= \frac{-5}{2x^2}$

Sur $]-\infty; 0[$ $F(x) = \frac{-5}{2x^2} + 17$

11) $f_{11}(x) = 5e^{4x-5}$

$$F_{11}(x) = \frac{5}{4}e^{4x-5} + 18$$

Exemple 2

1) Une primitive de f s'écrit par

$$F(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$F(1) = 0 \iff 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + k = 0$$

$$\iff k = -\frac{5}{6}$$

La primitive cherchée est définie par

$$F(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{6}.$$

3] Une primitive quelconque de f est définie par $F(x) = -\sin(2x) + k$ $(k \in \mathbb{R})$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + k = 1$

$\iff -1 + k = 1$

$\iff k = 2$

La primitive cherchée est définie par $F(x) = -\sin(2x) + 2$

5] $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Une primitive quelconque de f est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$F(1) = 1 \iff \frac{1}{2} - 1 - 2 + k = 1$

$\iff k = \frac{7}{2}$

La primitive cherchée est définie par

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + \frac{7}{2}.$$

Exemple 3

1) $f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$

L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{5}{2}\,\frac{2x}{x^2+1}$$

$u = x^2+1$

$u' = 2x$

$\frac{u'}{u} \longmapsto \ln(u)$

Une primitive de f est définie par

$$F(x) = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \frac{2\pi}{57}$$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \iff \frac{1}{x^2-1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1}$$

$$\iff 1 = a(x+1) + b(x-1)$$

$$\iff 1 = (a+b)x + a - b$$

$$\iff \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$

L'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

Sur $]1;+\infty[$ une primitive de f est définie par

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + 2$$

Sur $]-1;1[$ une primitive de f est définie par

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(-x+1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + 7$$

Sur $]-\infty;-1[$ une primitive de f est définie par

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(-x+1) - \frac{1}{2}\ln(-x-1) - \frac{4}{5}$$