Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

$$\underbrace{u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \quad \cdots \quad \xrightarrow{+r} u_{19}}_{\text{20 piquets (termes)}}$$

donc 19 intervalles

D'où $u_{19} = u_0 + 19 \times r$

Exprimer u_{219} en fonction de u_{41}

$$\underbrace{\underbrace{u_1 \quad \cdots \quad u_{40}}_{40} \quad u_{41} \quad u_{42} \quad \cdots \quad u_{219}}$$

219 − 40 = 179 termes

donc 178 intervalles.

D'où $u_{219} = u_{41} + 178\, r$

Exemples 7

1) $u_5 = 7$ et $r = 2$

Entre u_1 compris et u_5 compris, on a 5 termes donc 4 intervalles.

Ainsi $u_5 = u_1 + 4r$

$\Longleftrightarrow 7 = u_1 + 8$

$\Longleftrightarrow u_1 = -1$.

Entre u_1 compris et u_{25} compris, on a 25 termes donc 24 intervalles.

Ainsi $u_{25} = u_1 + 24r$
$= -1 + 24 \times 2$
$= 47$.

Entre u_1 et u_{100}, on a 100 termes donc 99 intervalles.

Ainsi $u_{100} = u_1 + 99r$
$= -1 + 198 = 197$.

3) $u_{n+1} - u_n = 7 - 3(n+1) - (7 - 3n)$

$= 7 - 3n - 3 - 7 + 3n$

$= -3$

La suite est arithmétique de raison -3.

5) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{u_n - 4 - 2(u_n - 3)}{u_n - 3}} - \dfrac{1}{u_n - 2}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{-u_n + 2}{u_n - 3}} - \dfrac{1}{u_n - 2}$

$= \dfrac{u_n - 3}{-u_n + 2} - \dfrac{1}{u_n - 2}$

$= \dfrac{-u_n + 3}{u_n - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2}$

$= \dfrac{-u_n + 3 - 1}{u_n - 2} = \dfrac{-u_n + 2}{u_n - 2} = -1$

La suite (v_n) est arithmétique de raison -1

et de premier terme $v_0 = -1$ $\quad v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{1 - 2} = -1$

De v_0 à v_n compris, on a $n+1$ termes

donc n intervalles.

Ainsi $v_n = v_0 + n \times (-1)$

$= -1 - n$.

Or $v_n = \frac{1}{u_n - 2} \iff u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$

$$\iff u_n = 2 + \frac{1}{v_n}$$

$$\iff u_n = 2 + \frac{1}{-1-n}$$

$$\iff u_n = \frac{2(n+1) - 1}{n+1}$$

$$\iff u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$
$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$2S = 101 \times 100$$
$$2S = 10100$$
$$\boxed{S = 5050}$$

Prop 3

$$S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

$$2S = (n+1) \times n$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$1^2 + 2^2 + \quad + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Exemple 8

$$S = \frac{1}{3} + 1 + \dots + \frac{19}{3} + 7$$
$$S = 7 + \frac{19}{3} + \dots + 1 + \frac{1}{3}$$

$$2S = \frac{22}{3} \times 11$$

L'intervalle entre $\frac{1}{3}$ et 7 mesure $\frac{20}{3}$

La raison est égale à $\frac{2}{3}$.

Donc on a $\frac{\frac{20}{3}}{\frac{2}{3}} = 10$ raisons entre $\frac{1}{3}$ et 7.

On en déduit 11 termes

$$S = \frac{121}{3}.$$

Exemples 9

1) De u_1 à u_4 compris, on a 4 termes et 3 intervalles.

Ainsi $u_4 = u_1 \times q^3 = 3\times(-2)^3 = -24$.

De u_1 à u_8 compris, on a 8 termes et donc 7 intervalles

D'où $u_8 = u_1 \times q^7 = 3\times(-2)^7 = -384$

De même $u_{20} = u_1 \times q^{19} = 3\times(-2)^{19} = -3\times 2^{19}$

3) $u_{n+1} = 3\times 2^{n+1} = 3\times 2^n \times 2$

$= u_n \times 2$

La suite (u_n) est géométrique de raison 2.

5) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{4u_n+2}{u_n+5} - 1}{\frac{4u_n+2}{u_n+5} + 2}$$

$$= \frac{\frac{4u_n+2-(u_n+5)}{u_n+5}}{\frac{4u_n+2+2(u_n+5)}{u_n+5}}$$

$$= \frac{3u_n-3}{6u_n+12} = \frac{3}{6}\,\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

$$= \frac{1}{2} v_n.$$

$$v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{-1}{2}.$$

Donc (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
et de premier terme $-\frac{1}{2}$.

De v_0 à v_n on a $n+1$ termes, donc n intervalles.
Ainsi $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} \iff u_n v_n + 2v_n = u_n - 1$

$$\iff u_n v_n - u_n = -1 - 2v_n$$

$$\iff u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$$

$$\iff u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n - 1}$$

$$\iff u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$$

$$\iff u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

$$\iff u_n = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1}$$

Propriété 4

$$S = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{\;} \cdots + \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^n}$$

$$qS = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cdots \cancel{\;} + \cancel{q^n} + q^{n+1}$$

$$S - qS = 1 - q^{n+1}$$

$$S(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

Si $q \neq 1$ $\quad S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple 10

1) $S = 1 + \cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{\;} \cdots + \cancel{1024} + \cancel{2048}$

$$2S = \cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{8} + \cdots \cancel{\;} + \cancel{2048} + 4096$$

$$S - 2S = 1 - 4096$$

$$S = 4095.$$

3) $S = 3 - \cancel{\dfrac{3}{5}} + \cancel{\dfrac{3}{25}} - \cancel{\;} \quad - \cancel{\dfrac{3}{1953125}}$

$$-\frac{1}{5}S = -\cancel{\frac{3}{5}} + \cancel{\frac{3}{25}} - \cancel{\frac{3}{125}} \quad - \cancel{\frac{3}{1953125}} \quad + \frac{3}{9765625}$$

$$S - \left(\frac{-1}{5}\right)S = 3 - \frac{3}{9765625}$$

$$S = \frac{3 - \frac{3}{9765625}}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}\left(3 - \frac{3}{9765625}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{9765625}\right)$$

Exemple 11

1) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2$

$$= \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) De v_0 à v_n, on a $n+1$ termes donc n intervalles.

Ainsi $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $u_n = v_n + 2 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

Exemple 11

3) a) $u_1 = 10 \times 0,9 + 1,2$

$= 9 + 1,2$

$= 10,2$

$u_2 = 10,2 \times 0,9 + 1,2$

$= 9,18 + 1,2$

$= 10,38$

b) La population diminue dans un premier temps de 10%, donc on obtient $0,9\, u_n$

Mais 1200 arrivent dans la ville donc

$u_{n+1} = 0,9\, u_n + 1,2$

c) i) $v_{n+1} = u_{n+1} - 12$

$= 0,9\, u_n + 1,2 - 12$

$= 0,9\, u_n + 1,2\,(1 - 10)$

$= 0,9\, u_n - 9 \times 1,2$

$= 0,9\, u_n - 0,9 \times 12$

$= 0,9\,(u_n - 12)$

$= 0,9\, v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9

ii) $v_0 = u_0 - 12 = 10 - 12 = -2$

De v_0 à v_n, on a n+1 termes donc n intervalles.

D'où $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 0,9^n$

iii) $u_n = v_n + 12 = 12 - 2 \times 0,9^n$

d) Le nombre d'habitants en 2030 est u_{13}

Donc $u_{13} = 12 - 2 \times 0{,}9^{13} \simeq 12 - 2 \times 0{,}254$

$\simeq 12 - 0{,}508$

$\simeq 11{,}492$ à 10^{-3} près

e) $u_{n+1} - u_n = -2 \times 0{,}9^{n+1} + 12 + 2 \times 0{,}9^n - 12$

$= -2(0{,}9^{n+1} - 0{,}9^n)$

$= -2 \times 0{,}9^n (0{,}9 - 1)$

$= -2 \times 0{,}9^n \times (-0{,}1)$

$= 0{,}2 \times 0{,}9^n \geq 0.$

La suite (u_n) est croissante.

Le nombre d'habitants augmente chaque année.

f) On cherche n tel que $u_n > 11{,}8$

$u_n > 11{,}8 \iff -2 \times 0{,}9^n + 12 > 11{,}8$

$\iff -2 \times 0{,}9^n > -0{,}2$

$\iff 0{,}9^n < \frac{-0{,}2}{-2}$

$\iff 0{,}9^n < 0{,}1$

$\ln(a^n) = n \ln a$

$\iff \ln(0{,}9^n) < \ln 0{,}1$

$\iff n \ln 0{,}9 < \ln 0{,}1$

$\boxed{\ln 0{,}9 < 0}$

$\iff n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9}$

$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$\ln 0{,}1 = \ln \frac{1}{10} = -\ln 10$

$\iff n > \frac{-\ln 10}{\ln 0{,}9}$

$\iff n \geq 22$

A partir de 2039, la population aura dépassé 11800 habitants.