

## Ch 11: Fonction exponentielle.

### Seinc 11-3

Exemple 8

2) Soit  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$  alors  $1+e^{-x} \neq 0$ .

L'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .

$$a) f'(x) = \frac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

Ainsi  $f'(x) > 0$ . La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

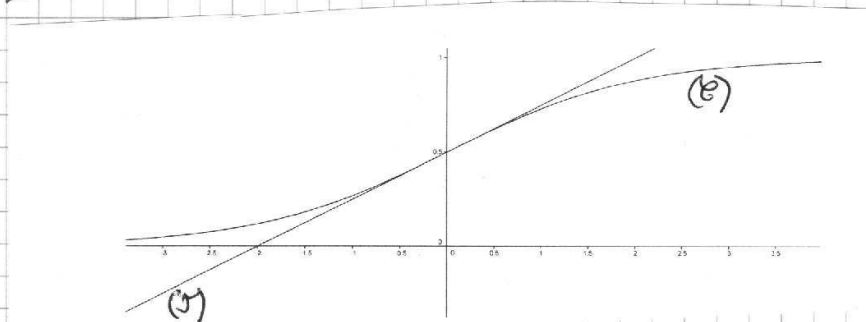
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1+e^{-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

On obtient le tableau de variation suivant.

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | 0         | 1         |

b)



$$\begin{aligned}
 c) \quad f''(x) &= (f'(x))' = \left( \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \right)' \\
 &= \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 - e^{-2}2(-e^{-x})(1+e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} \\
 &= \frac{-e^{-2}(1+e^{-x})[(1+e^{-x}) - 2e^{-x}]}{(1+e^{-x})^4} \\
 &= \frac{-e^{-2}(1+e^{-x}-2e^{-x})}{(1+e^{-x})^3} \\
 &= \frac{-e^{-2}(1-e^{-x})}{(1+e^{-x})^3}
 \end{aligned}$$

On étudie le signe de  $f''(x)$ , donc le signe de chaque facteur.

Facteur  $1-e^{-x}$

$$1-e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$1-e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

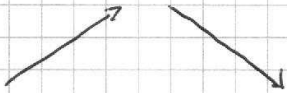
Facteur  $(1+e^{-x})^3$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $e^{-x} > 0$ , donc  $1+e^{-x} > 0$  et  $(1+e^{-x})^3 > 0$

Facteur  $-e^{-x}$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $-e^{-x} < 0$ .

On obtient le tableau suivant.

| $x$            | $-\infty$ | $0$                                                                                 | $+\infty$ |
|----------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $-e^{-x}$      | -         |                                                                                     | -         |
| $1-e^{-x}$     | -         | 0                                                                                   | +         |
| $(1+e^{-x})^3$ | +         |                                                                                     | +         |
| $f''(x)$       | +         | 0                                                                                   | -         |
| $f'(x)$        |           |  |           |

D'après ce tableau de variation,  $f$  admet un maximum en 0.

$$d) f'(0) = \frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2} \quad \text{Le point A de tangence a pour coordonnées } (0; \frac{1}{2})$$

La tangente ( $\beta$ ) a une équation du type:  $y = \frac{1}{4}x + b$ .

$$b = f(0).$$

Donc ( $\beta$ ) a pour équation  $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ .

e) Etudier la position relative de ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ) revient à étudier le signe de  $f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})$

$$f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{x+2}{4}$$

$$= \frac{4 - (x+2)(1+e^{-x})}{4(1+e^{-x})}$$

$$= \frac{4 - 2 - xe^{-x} - 2 - 2e^{-x}}{4(1+e^{-x})}$$

$$= \frac{2 - x - 2e^{-x} - 2e^{-x}}{4(1+e^{-x})}$$

$$= \frac{2e^x - xe^x - 2 - x}{4(e^x + 1)}$$

en multipliant numérateur et dénominateur par  $e^x$

$$\text{On note } h(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$$

$$h'(x) = 2e^x - (e^x + xe^x) - 1$$

$$= e^x - xe^x - 1$$

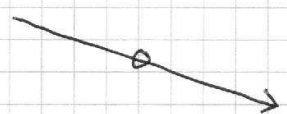
$$h''(x) = e^x - (e^x + xe^x)$$

$$= -xe^x$$

On peut alors dresser le tableau suivant.

| $x$              | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|------------------|-----------|-----|-----------|
| $\frac{-x}{e^x}$ | +         | 0   | -         |
| $h''(x)$         | +         | 0   | -         |
| $h'(x)$          |           | 0   |           |
| $h(x)$           | -         | 0   | -         |

On en déduit les variations puis le signe de  $h(x)$ .

|         |                                                                                   |     |           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                         | $0$ | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | $-$                                                                               | $0$ | $-$       |
| $h(x)$  |  |     |           |
| $h(x)$  | $+$                                                                               | $0$ | $-$       |

Ainsi on obtient le tableau de position relative :

|                                                   |                                         |     |                                          |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----|------------------------------------------|
| $x$                                               | $-\infty$                               | $0$ | $+\infty$                                |
| $h(x)$                                            | $+$                                     | $0$ | $-$                                      |
| $\frac{1}{4}(x+1)$                                | $+$                                     |     | $+$                                      |
| $h(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})$             | $+$                                     | $0$ | $-$                                      |
| position                                          | $\textcircled{6}$ au-dessus<br>de $(5)$ |     | $\textcircled{6}$ en-dessous<br>de $(5)$ |
| $\textcircled{6}$ et $(5)$ ont<br>un point commun |                                         |     |                                          |