

Chapitre 13 : Suites (1)

Série 13-2

Exemple 3

$$\begin{aligned} f) \quad u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 - (2n^2 - 3n + 1) \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1 - 2n^2 + 3n - 1 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

Si $n \geq 1$ alors $4n - 1 \geq 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} g) \quad u_{n+1} - u_n &= 5 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 5 \left(\frac{2}{3} \right)^n = 5 \left(\frac{2}{3} \right)^n \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \\ &= 5 \left(\frac{2}{3} \right)^n \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{5}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n \end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

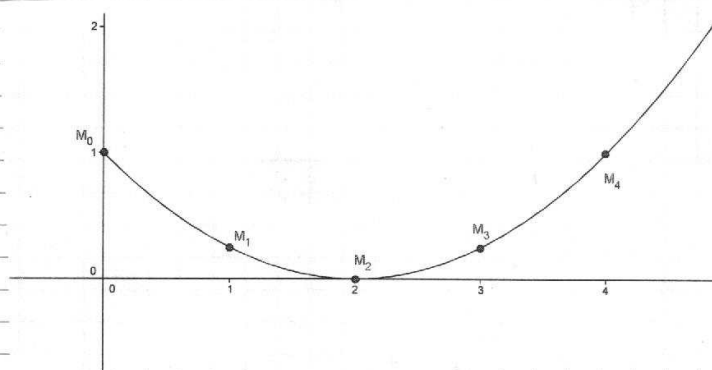
$$\begin{aligned} n) \quad u_{n+1} - u_n &= -3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \times \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

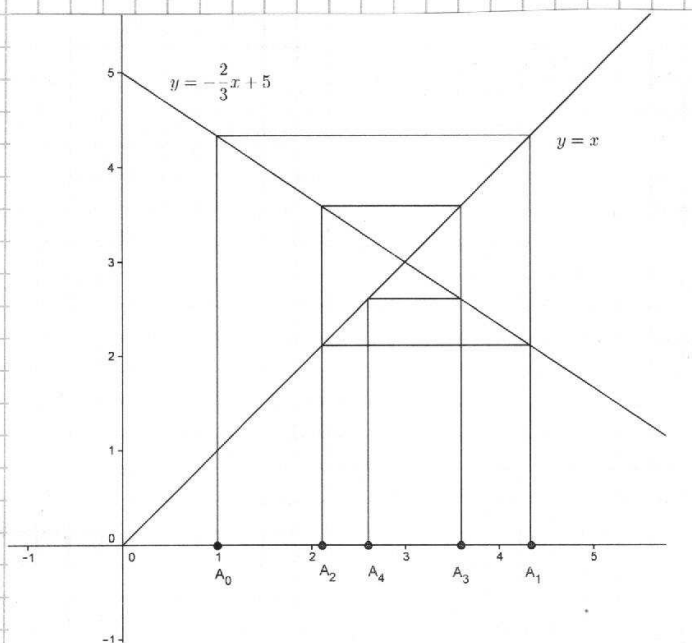
La suite (u_n) est croissante.

Exemple 4

2) On trace la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$ pour $x \geq 0$



4)



Les points A_i sont de coordonnées $(u_i, 0)$.

Exemple 5

2) Si $n \geq 0$ alors $-5n \leq 0$ et $-5n + 102 \leq 102$.

La suite (u_n) est majorée par 102.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, la suite (u_n) n'est pas minorée.

4) Par tout n , on a: $-1 \leq \cos n \leq 1$

$$\text{donc } -8 \leq 8 \cos n \leq 8$$

$$\text{et } -1 \leq 8 \cos n + 7 \leq 15$$

La suite (u_n) est bornée par -1 et 15.

$$\begin{aligned} 6) \quad u_{n+1} - u_n &= -3(n+1)^2 + 2(n+1) - 1 - (-3n^2 + 2n - 1) \\ &= -3n^2 - 6n - 3 + 2n + 2 - 1 + 3n^2 - 2n + 1 \\ &= -6n - 1 \end{aligned}$$

Si $n \geq 0$ alors $-6n - 1 \leq 0$. La suite (u_n) est décroissante.

Elle est donc majorée par $u_0 = -1$.

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 \left(-3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right). \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} -3 + \frac{2}{n} = -3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme} \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}) = -3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \end{array} \right\} \\ &\text{par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty. \\ &\text{La suite } (u_n) \text{ n'est pas minorée.} \end{aligned}$$

2/3

$$\begin{aligned}
 \underline{2)} \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{4(n+1)+3}{n+2} - \frac{4n+3}{n+1} \\
 &= \frac{(4n+7)(n+1) - (4n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{4n^2 + 4n + 7n + 7 - 4n^2 - 8n - 3n - 6}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

Comme $n \geq 0$, alors $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ est positif.

La suite (u_n) est croissante. Elle est minorée par u_0 .

Or $u_0 = 3$.

$$\text{On a: } u_n = \frac{n(4 + \frac{3}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} = \frac{4 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{3}{n} &= 4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ par quotient } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$$

Comme la suite est croissante, elle est majorée par 4.

Ainsi la suite (u_n) est bornée par 3 et 4.