

Chapitre n°14 : la fonction logarithme.

Série 14-1

Exemple 1

3) Soit (E_2) l'équation: $\ln(3x-1)=0$.

Soit D_f l'ensemble de définition de (E_2)

$$x \in D_f \Leftrightarrow 3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc } D_f =]\frac{1}{3}; +\infty[$$

$$(E_2) \Leftrightarrow \ln(3x-1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Or $\frac{2}{3} \in D_f$. L'ensemble des solutions de (E_2) est: $S = \{\frac{2}{3}\}$

4) Soit (E_4) l'équation: $(2x-3)\ln(1-x)$

Soit D_f l'ensemble de définition de (E_4)

$$x \in D_f \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1. \text{ D'où } D_f =]-\infty; 1[$$

$$(E_4) \Leftrightarrow 2x-3=0 \text{ ou } \ln(1-x)=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } 1-x=1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x=0$$

Or $\frac{3}{2} \notin D_f$ et $0 \in D_f$.

L'ensemble des solutions de (E_4) est: $S = \{0\}$

6) Soit (E_6) l'équation: $\ln(x+3) = \ln(2-x)$

Soit D_f l'ensemble de définition de (E_6)

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 2 \end{cases}$$

$$\text{D'où } D_f =]-3; 2[.$$

$$(E_6) \Leftrightarrow x+3 = 2-x$$

$$\Leftrightarrow 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Or $-\frac{1}{2} \in D_f$. L'ensemble des solutions de (E_6) est: $S = \{-\frac{1}{2}\}$ $\frac{1}{4}$

8] Soit (E_3) l'équation: $\ln(2x^2 - 5x + 1) = 1$

Soit D_f l'ensemble de définition de (E_3)

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 1 > 0$$

Le discriminant de $2x^2 - 5x + 1$ est $\Delta = 25 - 4 \times 2 = 17$.

Ainsi $2x^2 - 5x + 1$ a deux racines: $\frac{5 + \sqrt{17}}{4}$ et $\frac{5 - \sqrt{17}}{4}$.

La parabole est du type .

$$\text{Ainsi } D_f =]-\infty; \frac{5 - \sqrt{17}}{4}[\cup] \frac{5 + \sqrt{17}}{4}; +\infty[$$

$$(E_3) \Leftrightarrow \ln(2x^2 - 5x + 1) = \ln e$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 1 = e$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 1 - e = 0.$$

Le discriminant de $2x^2 - 5x + 1 - e$ est $\Delta = 25 - 8(1 - e)$

$$\text{Ainsi } (E_3) \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{17 + 8e}}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5 - \sqrt{17 + 8e}}{4}$$

$= 17 + 8e$

$$\text{Or } \frac{5 + \sqrt{17 + 8e}}{4} \in D_f \quad \text{et} \quad \frac{5 - \sqrt{17 + 8e}}{4} \in D_f.$$

$$\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est: } S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{17 + 8e}}{4}; \frac{5 - \sqrt{17 + 8e}}{4} \right\}$$

10] Soit (I_2) l'inéquation: $\ln x \leq -1$

L'ensemble de définition de (I_2) est $D_f =]0; +\infty[$

$$(I_2) \Leftrightarrow \ln x \leq \ln \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{e}.$$

Seules les valeurs de $]0; \frac{1}{e}]$ appartiennent à D_f .

$$\text{L'ensemble des solutions de } (I_2) \text{ est: } S =]0; \frac{1}{e}]$$

12] Soit (I_4) l'inéquation: $(x - 5)(\ln(x) + 1) < 0$.

L'ensemble de définition de (I_4) est: $D_f =]0; +\infty[$

On étudie le signe de $\ln(x) + 1$.

$$\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

$$\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

On dresse le tableau de signes suivant.

x	0	$\frac{1}{e}$	5	$+\infty$		
$x-5$		-	-	0	+	
$\ln(x)+1$		-	0	+		
$(x-5)(\ln(x)+1)$		+	0	-	0	+

Donc $(I_4) \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{e}; 5[$

Toutes ces valeurs appartiennent à D_f .

D'où l'ensemble des solutions de (I_4) est: $S =]\frac{1}{e}; 5[$

Exemple 2

3] L'ensemble de définition de f_2 est: $D_f =]0; +\infty[$

$$f'_2(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

4] L'ensemble de définition de f_4 est $D_f =]0; +\infty[$

$$f'_4(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 1 \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

6] Soit D_f l'ensemble de définition de f_6 .

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ x \neq 1 \end{cases}$$

D'où $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

$$f'_6(x) = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x \ln x - x}{(\ln x)^2} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

8] Soit D_f l'ensemble de définition de f_8 .

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+1}{2x-3} > 0 \\ 2x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+1}{2x-3} > 0 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

On dresse le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4x+1$		-	0	+
$2x-3$		-	-	0
$\frac{4x+1}{2x-3}$		+	0	-

D'où $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -\frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[\\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$

Donc $D_f =]-\infty; -\frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$

$$f'_8(x) = \frac{\left(\frac{4x+1}{2x-3}\right)'}{\frac{4x+1}{2x-3}} = \frac{4(2x-3) - 2(4x+1)}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{8x-12-8x-2}{(2x-3)^2} = \frac{-14}{(2x-3)^2} = \frac{-14}{\frac{4x+1}{2x-3}} = \frac{-14}{(2x-3)^2} \times \frac{2x-3}{4x+1} = \frac{-14}{(2x-3)(4x+1)}$$

10] Soit D_f l'ensemble de définition de f_0

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2+x-12 > 0.$$

Le discriminant de x^2+x-12 est $\Delta = 1+48 = 49$.

Ainsi x^2+x-12 a deux racines : $x_1 = \frac{-1+7}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-1-7}{2} = -4$

La parabole est du type $\vee$

Donc $D_f =]-\infty; -4[\cup]3; +\infty[$.

$$f'_{10}(x) = \frac{(x^2+x-12)'}{x^2+x-12} = \frac{2x+1}{x^2+x-12}$$

12] L'ensemble de définition de f_2 est $D_f =]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'_{12}(x) &= 2(x \ln x)(x \ln x)' = 2x \ln 2 (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \\ &= 2x \ln 2 (\ln x + 1) \end{aligned}$$

14] L'ensemble de définition de f_3 est $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'_{14}(x) = \left(\frac{\ln 3}{x}\right)' e^{\frac{\ln 3}{x}} = -\frac{\ln 3}{x^2} e^{\frac{\ln 3}{x}}$$

Exemple 3

$$2] A = \ln(10e) = \ln(10) + \ln e = \ln(2 \times 5) + 1 = \ln 2 + \ln 5 + 1$$

$$B = \frac{1}{\ln 25} = \frac{1}{\ln 5^2} = \frac{1}{2 \ln 5}$$

$$C = \ln\left(\frac{5}{8}\right) = \ln 5 - \ln 8 = \ln 5 - \ln 2^3 = \ln 5 - 3 \ln 2$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{\ln 2\sqrt{5}}{\ln e\sqrt{e}} = \frac{\ln 2 + \ln \sqrt{5}}{\ln e + \ln \sqrt{e}} = \frac{\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5}{1 + \frac{1}{2} \ln e} = \frac{\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5}{1 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 5 \end{aligned}$$