

Chapitre 14: la fonction logarithme népérien

Série 14-2.

Exemple 4

2) a) $f_1(x) = x + \ln x$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = -\infty$$

b) $f_2(x) = -x^2 - \ln x$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$$

c) $f_3(x) = (4x^2 - 1) \ln x$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = +\infty$$

d) $f_4(x) = (2x^2 - x + 3) \ln x$

$$2x^2 - x + 3 = x^2 \left(-2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)$$

$$\text{donc } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 - \frac{1}{x} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ par somme } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 3) = +\infty$$

$$\text{Ainsi } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - x + 3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 - x + 3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) = -\infty$$

$$e) \quad f_5(x) = \frac{7x^2 \ln x}{\ln x \left(\frac{3}{\ln x} - 5 \right)} = \frac{7x^2}{\frac{3}{\ln x} - 5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\ln x} - 5 = -5 \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} 7x^2 \ln x = 0 \text{ par croissance comparée.} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - 5 \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_6(x) = 0$$

$$f) \quad f_6(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$$

$$f_6(x) = \frac{\ln x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ par croissance comparée.} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_6(x) = -\infty$$

Exemple 5

$$\begin{aligned} 2) \ a) \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} -x+1 = 1 \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^+}} \right\} \text{par somme } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = x \left(-1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{x} = -1 \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{par croissance comparée} \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \right\} \text{par somme} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = -1$$

$$\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \right\} \text{par produit} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On obtient le tableau de variation suivant:

x	0	1	$+\infty$
$1-x$		+	-
x		+	+
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

c) Le maximum de f sur $]0; +\infty[$ est 0. Donc $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

$$d) \quad f(1) = 0. \text{ et } f'(1) = 0.$$

La tangente est horizontale. et a donc pour équation $y=0$.

e) Comme la tangente est l'axe des abscisses, déterminer la position relative de (C) et (S) revient à étudier le signe de $f(x)$.

D'après la question c), (C) est au-dessus pour $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et en $x=1$ elles ont un point commun.

21

