

TD n°11 : la fonction exponentielle

Exercice 6

1) L'ensemble de définition de f_1 est $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'_1(x) = e^x + x e^x = (x+1)e^x$$

2) L'ensemble de définition de f_2 est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f'_2(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

3) Comme $e^x \neq -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f_3 est $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'_3(x) = x + \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = x + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

4) L'ensemble de définition de f_4 est $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'_4(x) = e^x - 3$$

5) L'ensemble de définition de f_5 est $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'_5(x) = -2e^x + (-2x+5)e^x = (-2x+3)e^x$$

6) L'ensemble de définition de f_6 est $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'_6(x) = (-6x)(e^x) + (-3x^2+5)e^x = (-3x^2-6x+5)e^x$$

7) L'ensemble de définition de f_7 est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f'_7(x) = \frac{e^x(x+1) - (e^x+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{e^x x + e^x - e^x - 1}{(x+1)^2} = \frac{e^x x - 1}{(x+1)^2}$$

8) Comme $e^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f_8 est $D_f = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'_8(x) &= \frac{e^x e^x - (e^x + 2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^{2x} - e^x - 2e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{-2e^x}{e^{2x}} = -2e^x \cdot e^{-2x} = -2e^{-x} \end{aligned}$$

Exercice 7

1) L'ensemble de définition de f_1 est $D_f = \mathbb{R}$

$$f'_1(x) = (6x-1)e^{3x^2-x+1}$$

2) L'ensemble de définition de f_2 est $D_f = \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f'_2(x) &= (-1)e^{\frac{1}{x}} + (3-x)\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{1}{x}}\left(-1 - \frac{3}{x^2} + \frac{x}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) \end{aligned}$$

3) L'ensemble de définition de f_3 est $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'_3(x) &= 2xe^{-3x} + (x^2+1)(-3e^{-3x}) \\ &= e^{-3x}(2x - 3x^2 - 3) \end{aligned}$$

4) L'ensemble de définition de f_4 est $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'_4(x) &= e^{2x^2-5x+4} + (x+1)(4x-5)e^{2x^2-5x+4} \\ &= e^{2x^2-5x+4}(1 + 4x^2 - 5x + 4x - 5) \\ &= (4x^2 - x - 4)e^{2x^2-5x+4} \end{aligned}$$

5) L'ensemble de définition de f_5 est $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'_5(x) = e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

6) L'ensemble de définition de f_6 est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$\begin{aligned} f'_6(x) &= \left(\frac{2x+1}{x+3}\right)' e^{\frac{2x+1}{x+3}} = \frac{2(x+3) - (2x+1)}{(x+3)^2} e^{\frac{2x+1}{x+3}} \\ &= \frac{5}{(x+3)^2} e^{\frac{2x+1}{x+3}} \end{aligned}$$

7) L'ensemble de définition de f_7 est $D_f = \mathbb{R}$

$$f'_7(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + x \cdot \frac{2x}{2} e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}$$

8) L'ensemble de définition de f_8 est $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'_8(x) &= 2xe^{2x-3} + x^2 2e^{2x-3} = (2x + 2x^2)e^{2x-3} \\ &= 2x(x+1)e^{2x-3} \end{aligned}$$

Exercice 8

$$1) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ par croissance comparée}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$f'(x) = e^x + x e^x = (x+1)e^x$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$		$- \quad 0 \quad +$	
e^x		$+$	$+$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$f(x)$	-1		$+\infty$

$-1 \rightarrow -1 - e^{-1}$

$$2) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = 1 + e^x > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) Comme $e^x \neq -2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de h est $D_f = \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = 2 \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$$

$$h(x) = \frac{e^x(1 - \frac{2}{e^x})}{e^x(1 + \frac{2}{e^x})} = \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{e^x} = 1 \\ \text{de même } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{e^x} = 1 \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

$$h'(x) = \frac{e^x(e^x + 2) - (e^x - 2)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x - e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2}$$

Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$		↗ 1

4) Comme $e^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de i est $D_f = \mathbb{R}$.

$$i(x) = (x-2)e^{-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x-2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = -\infty$$

$$i(x) = \frac{x(1 - \frac{2}{e^x})}{\frac{e^x}{e^x}} = \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{\frac{e^x}{x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ par croissance comparée} \end{array} \right\} \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = 0$$

4/5

$$i'(x) = \frac{e^x - (x-2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x+2)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{-x+3}{e^x}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$	
$-x+3$		+	0	-
e^x		+		+
$i'(x)$		+	0	-
$i(x)$			e^{-3}	
	$-\infty$			0