

TD n°12 : Trigonométrie.

Exercice 13

1) Soit (E_1) l'équation : $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0$

On pose $X = \cos x$.

$$(E_1) \Leftrightarrow 2X^3 - 3X^2 + 4X + 3 = 0.$$

$$\text{Soit } P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 4X + 3$$

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0. \end{aligned}$$

Donc $-\frac{1}{2}$ est une racine de $P(X)$. Ainsi $P(X)$ est factorisable par $X + \frac{1}{2}$. On pose la division euclidienne de $P(X)$ par $X + \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 3X^2 + 4X + 3 & X + \frac{1}{2} \\ \hline -2X^3 - X^2 & 2X^2 - 4X + 6 \\ \hline -4X^2 + 4X + 3 & \\ 4X^2 + 2X & \\ \hline 6X + 3 & \\ -6X - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{D'où } P(X) = \left(X + \frac{1}{2}\right)(2X^2 - 4X + 6).$$

$$\text{Le discriminant de } 2X^2 - 4X + 6 \text{ est } \Delta = 16 - 48 = -32 < 0$$

$$\text{Ainsi } (E_1) \Leftrightarrow X + \frac{1}{2} = 0 \text{ ou } 2X^2 - 4X + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + k2\pi; \frac{4\pi}{3} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) Soit (E_2) l'équation : $\cos^4 x + \frac{7}{2} \cos^3 x - \cos^2 x - \frac{13}{2} \cos x + 3 = 0$

On pose $X = \cos x$.

$$(E_2) \Leftrightarrow X^4 + \frac{7}{2} X^3 - X^2 - \frac{13}{2} X + 3 = 0$$

$$\text{Soit } P(X) = X^4 + \frac{7}{2} X^3 - X^2 - \frac{13}{2} X + 3$$

$$P(1) = 1 + \frac{7}{2} - 1 - \frac{13}{2} + 3 = 0$$

Donc 1 est une racine de $P(X)$. Ainsi $P(X)$ est factorisable par $X-1$. On pose la division euclidienne de $P(X)$ par $X-1$.

$$\begin{array}{r|l} X^4 + \frac{7}{2} X^3 - X^2 - \frac{13}{2} X + 3 & X-1 \\ -X^4 + X^3 & \\ \hline \frac{9}{2} X^3 - X^2 - \frac{13}{2} X + 3 & \\ -\frac{9}{2} X^3 + \frac{9}{2} X^2 & \\ \hline \frac{7}{2} X^2 - \frac{13}{2} X + 3 & \\ -\frac{7}{2} X^2 + \frac{7}{2} X & \\ \hline -3X + 3 & \\ 3X - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{D'où } P(X) = (X-1) \left(X^3 + \frac{9}{2} X^2 + \frac{7}{2} X - 3 \right).$$

$$\text{Soit } Q(X) = X^3 + \frac{9}{2} X^2 + \frac{7}{2} X - 3$$

$$\begin{aligned} Q(-2) &= (-2)^3 + \frac{9}{2} (-2)^2 + \frac{7}{2} (-2) - 3 \\ &= -8 + 18 - 7 - 3 = 0 \end{aligned}$$

Donc -2 est une racine de $Q(X)$. Ainsi $Q(X)$ est factorisable par $X+2$. On pose la division euclidienne de $Q(X)$ par $X+2$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + \frac{9}{2} X^2 + \frac{7}{2} X - 3 & X+2 \\ -X^3 - 2X^2 & \\ \hline \frac{5}{2} X^2 + \frac{7}{2} X - 3 & \\ -\frac{5}{2} X^2 - 5X & \\ \hline -\frac{3}{2} X - 3 & \\ \frac{3}{2} X + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

D'où $Q(x) = (x+2)(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2})$

Le discriminant de $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$ est $\Delta = \frac{25}{4} + 4 \times \frac{3}{2} = \frac{49}{4}$

Ainsi $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$ a deux racines: $x_1 = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{7}{2}}{2} = \frac{1}{2}$

$$x_2 = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{7}{2}}{2} = -3$$

D'où $P(x) = (x-1)(x+2)(x-\frac{1}{2})(x+3)$

Ainsi $(E_2) \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-3$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = -2 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -3$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{car } \cos x \in [-1; 1]$$

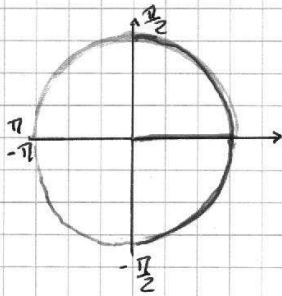
$$\Leftrightarrow x = k2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est:

$$S = \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

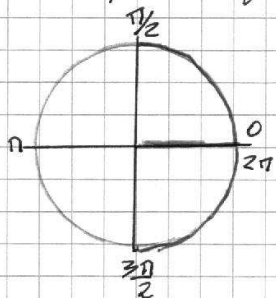
Exercice 16

1) Soit (I_1) l'inéquation : $\cos x \geq 0$ sur $[-\pi, \pi]$



L'ensemble des solutions de (I_1) est : $S = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

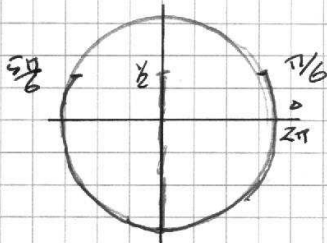
2) Soit (I_2) l'inéquation $\cos x \geq 0$ sur $[0, 2\pi]$



L'ensemble des solutions de (I_2) est $S = [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$

3) Soit (I_3) l'inéquation : $-\frac{1}{2} + \sin x \leq 0$ sur $[0, 2\pi]$

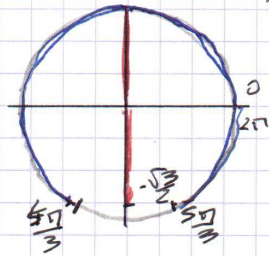
$$(I_3) \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1}{2}$$



L'ensemble des solutions de (I_3) est : $S = [0; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}; 2\pi]$

4) soit (I_4) l'inéquation: $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ sur $[0; 2\pi]$.

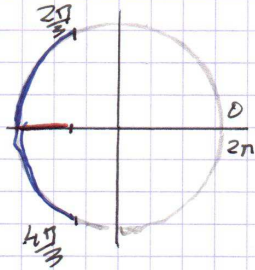
$$(I_4) \Leftrightarrow \sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



L'ensemble des solutions de (I_4) est: $S = [0; \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}; 2\pi]$

5) soit (I_5) l'inéquation: $\cos x + \frac{1}{2} \leq 0$ sur $[0; 2\pi]$

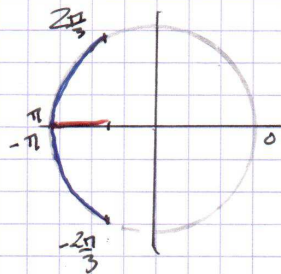
$$(I_5) \Leftrightarrow \cos x \leq -\frac{1}{2}$$



L'ensemble des solutions de (I_5) est $S = [\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$

6) soit (I_6) l'inéquation: $\cos x + \frac{1}{2} \leq 0$ sur $[-\pi; \pi]$

$$(I_6) \Leftrightarrow \cos x \leq -\frac{1}{2}$$



L'ensemble des solutions de (I_6) est: $S = [-\pi; -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi]$