

TD n° 13 : Suites (1)

Exercice 1

1) On a : $u_1 = 3$, $u_2 = 7$, $u_3 = 11$.

D'une rangée à la suivante, on a rajouté 4 allumettes :

2 au début $\rightarrow$ et 2 à la fin de la rangée $\leftarrow$

Ainsi (u_n) est définie par
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

2) On a : $u_1 = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ $u_2 = \frac{1 \times 2}{2} = 1$ $u_3 = \frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2}$
 $u_4 = \frac{1 \times 4}{2} = 2$.

La $n^{\text{ème}}$ figure est un triangle de base 1 et de hauteur n .

Donc $u_n = \frac{1 \times n}{2} = \frac{n}{2}$.

La suite (u_n) est définie par $u_n = \frac{n}{2}$ pour $n \geq 1$.

3) On a : $u_1 = 1$ $u_2 = 1 + \frac{1}{1} = 1 + \frac{1}{u_1} = 2$

$$u_3 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{u_2}$$

$$u_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{u_3}$$

$$u_5 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{u_4}$$

Ainsi la suite (u_n) est définie par
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

4) On a : $u_0 = 1000$

$$u_1 = 1000 \times 1,05$$

$$u_2 = 1,05 u_1$$

Ainsi la suite (u_n) est définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,05 u_n \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

5) On a: $u_0 = 10\,000$

La population augmente de 2% donc est multipliée par 1,02 mais perd 500 habitants.

Ainsi $u_{n+1} = 1,02 u_n - 500$.

La suite (u_n) est définie par
$$\begin{cases} u_0 = 10\,000 \\ u_{n+1} = 1,02 u_n - 500 \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

6) On a: $v_0 = 1$

$v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n}$ car v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$

Ainsi la suite (v_n) est définie par
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exercice 2

1) $u_0 = 3$ $u_1 = \frac{7}{2}$ $u_2 = \frac{11}{3}$ $u_3 = \frac{15}{4}$

2) $u_0 = 3$ $u_1 = \frac{4 \times 3 + 3}{3+1} = \frac{15}{4}$ $u_2 = \frac{4 \times \frac{15}{4} + 3}{\frac{15}{4} + 1} = \frac{18}{\frac{19}{4}} = \frac{72}{19}$

$u_3 = \frac{4 \times \frac{72}{19} + 3}{\frac{72}{19} + 1} = \frac{345}{91}$

3) $u_1 = \frac{-1}{1} = -1$ $u_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$ $u_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$

$u_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$

4) $u_0 = \sin(0) = 0$ $u_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $u_2 = \sin(\pi) = 0$

$u_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

5) $u_0 = 4$ $u_1 = 2 \times 4 + 3 \times 0 = 8$ $u_2 = 2 \times 8 + 3 \times 1 = 19$

$u_3 = 2 \times 19 + 3 \times 2 = 44$

6) $u_1 = \frac{4u_0}{u_0+1} + 0^2 - 1 = \frac{4}{2} + 0 - 1 = 1$

$u_2 = \frac{4u_1}{u_1+1} + 1^2 - 1 = \frac{4}{2} + 1 - 1 = 2$

$u_3 = \frac{4u_2}{u_2+1} + 2^2 - 1 = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3}$

$u_4 = \frac{4u_3}{u_3+1} + 3^2 - 1 = \frac{68}{\frac{20}{3}} + 8 = \frac{17}{5} + 8 = \frac{57}{5}$

$\frac{2}{3}$

Exercise 3

1) $u_0 = 1$ $u_1 = 1$ $u_2 = u_0 + u_1 = 2$

$u_3 = u_1 + u_2 = 1 + 2 = 3$ $u_4 = u_2 + u_3 = 2 + 3 = 5$

$u_5 = u_3 + u_4 = 3 + 5 = 8$

2) $u_0 = 0$ $u_1 = 1$ $u_2 = \frac{1}{u_1} + u_0 + 0^2 = 1 + 0 = 1$

$u_3 = \frac{1}{u_2} + u_1 + 1^2 = \frac{1}{1} + 1 + 1 = 3$

$u_4 = \frac{1}{u_3} + u_2 + 2^2 = \frac{1}{3} + 1 + 4 = \frac{16}{3}$

$u_5 = \frac{1}{u_4} + u_3 + 3^2 = \frac{3}{16} + 3 + 9 = \frac{3}{16} + 12 = \frac{195}{16}$

Exercise 4

1) $u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 1 = 2n^2 + 4n + 1$

$u_{n+1} = 2(n-1)^2 - 1 = 2n^2 - 4n + 1$

$u_{n+2} = 2(n+2)^2 - 1 = 2n^2 + 8n + 7$

$u_{2n+1} = 2(2n+1)^2 - 1 = 8n^2 + 8n + 1$

2) $v_{n+1} = 2^{3(n+1)} - 1$ donc $v_n = 2^{3n} - 1$

$v_{n+2} = 2^{3(n+2)} - 1 = 2^{3n+6}$

$v_{2n+1} = 2^{3(2n+1)} - 1 = 2^{6n+3}$

3) $w_{n+2} = 2w_{n+1} + 1$

$w_{n+3} = 2w_{n+2} + 1 = 2(2w_{n+1} + 1) + 1 = 4w_{n+1} + 3$

$w_n = \frac{1}{2}(w_{n+1} - 1) = \frac{1}{2}w_{n+1} - \frac{1}{2}$

4) $x_{n+1} = 2x_n^2 + 3$

$x_{n+2} = 2x_{n+1}^2 + 3 = 2(2x_n^2 + 3)^2 + 3$

$= 2(4x_n^4 + 12x_n^2 + 9) + 3$

$= 8x_n^4 + 24x_n^2 + 21$