

TD n° 14 : Suites (1)

Exercice 14

1) $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{u_n + 20}{5} - 5 = \frac{u_n + 20 - 25}{5} = \frac{u_n - 5}{5} = \frac{1}{5} v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

$$v_0 = u_0 - 5 = 0 - 5 = -5.$$

2) De v_0 à v_n , on a $n+1$ termes donc n intervalles. Pour passer de v_0 à v_n on a multiplié n fois par $\frac{1}{5}$.

$$\text{Donc } v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = -5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\text{Ainsi } u_n = v_n + 5 = 5 - \frac{1}{5^{n-1}}$$

Exercice 17

1) En 2016, l'organisme a abattu $\frac{5}{100} \times 5000 = 250$ arbres et en a replanté 300.

$$\text{Ainsi } u_1 = 5000 - 250 + 300 = 5050$$

En 2017, l'organisme a abattu $\frac{5}{100} \times 5050 = 252,5$ arbres et en a replanté 300.

$$\text{Ainsi } u_2 = 5050 - 252,5 + 300 = 5097,5$$

2) D'une année sur l'autre, l'organisme abat 5% des arbres donc en conserve 95% ce qui donne $0,95u_n$ mais on replante 300.

$$\text{On obtient donc } u_{n+1} = 0,95u_n + 300.$$

3) a)
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6000 = 0,95u_n + 300 - 6000$$

$$= 0,95u_n - 5700$$

$$= 0,95 \left(u_n - \frac{5700}{0,95} \right)$$

$$= 0,95 (u_n - 6000)$$

$$= 0,95 v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,95.

$$v_0 = u_0 - 6000 = 5000 - 6000 = -1000$$

b) De v_0 à v_n compris, on a $(n+1)$ termes donc n intervalles.

$$\text{Ainsi } v_n = v_0 \times 0,95^n = -1000 \times 0,95^n$$

$$\begin{aligned} \text{c) } u_n &= v_n + 6000 = v_0 \times 0,95^n + 6000 \\ &= -1000 \times 0,95^n + 6000. \end{aligned}$$

4) Le nombre d'arbres en 2025 correspond à u_{10} .

$$u_{10} = -1000 \times 0,95^{10} + 6000$$

$$\approx 5401 \text{ arbres. à } 1 \text{ près.}$$

$$5) u_{n+1} - u_n = -1000 \times 0,95^{n+1} + 6000 - (-1000 \times 0,95^n + 6000)$$

$$= -1000 \times 0,95^{n+1} + 1000 \times 0,95^n$$

$$= 1000 \times 0,95^n (-0,95 + 1)$$

$$= 1000 \times 0,95^n \times 0,05$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

La suite (u_n) est croissante, cela signifie que la forêt possède de plus en plus d'arbres au fil des années.

$$6) \text{ On a : pour tout } n \in \mathbb{N} : 1000 \times 0,95^n \geq 0$$

$$\text{donc } -1000 \times 0,95^n \leq 0$$

$$\text{d'où } -1000 \times 0,95^n + 6000 \leq 6000$$

$$\text{c'est-à-dire } u_n \leq 6000.$$

La suite (u_n) est majorée par 6000.

Cela signifie que la forêt n'aura jamais plus de 6000 arbres.