

# TD n° 13 : Suites (1)

## Exercice 5

a)  $u_n = n^2 - 6n - 7$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = -7 \\ u_1 = -12 \end{array} \right\} \text{ donc } (u_n) \text{ n'est pas croissante.}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_3 = -16 \\ u_4 = -15 \end{array} \right\} \text{ donc } (u_n) \text{ n'est pas décroissante.}$$

La suite  $(u_n)$  n'est ni croissante, ni décroissante.

b)  $u_n = 2^n - n$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } (u_n) \text{ n'est pas croissante.}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \end{array} \right\} \text{ donc } (u_n) \text{ n'est pas décroissante.}$$

La suite  $(u_n)$  n'est ni croissante, ni décroissante.

c)  $u_{n+1} - u_n = u_n - 3 - u_n = -3 < 0$

La suite  $(u_n)$  est décroissante.

$$\begin{aligned} d) \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n}{2^{n+1}} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1-n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Si  $n \geq 1$  alors  $1-n \leq 0$ . Comme  $2^{n+1} \geq 0$ , alors  $\frac{1-n}{2^{n+1}} \leq 0$ .

La suite  $(u_n)$  est décroissante.

e)  $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} \\ &= \frac{(2n+5)(n+1) - (n+2)(2n+3)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + 5n + 5 - (2n^2 + 3n + 4n + 6)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{7n + 5 - 7n - 6}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  est décroissante.

On aurait pu aussi étudier les variations de la fonction  $f$

définie par  $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$  sur  $[0; +\infty[$

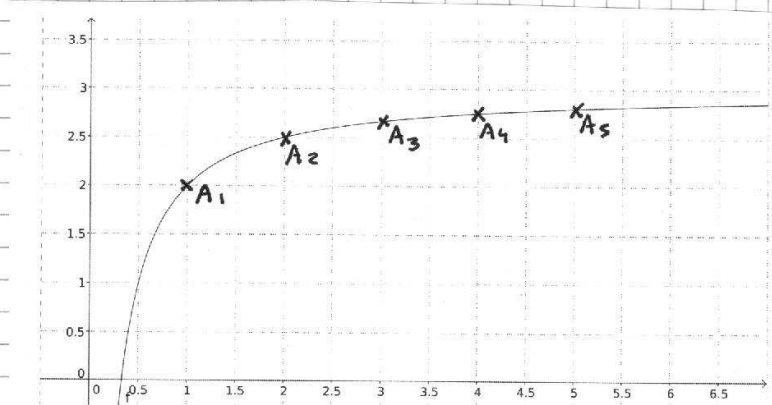
$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ . La fonction  $f$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$   
donc la suite  $(u_n)$  est aussi décroissante.

$$\begin{array}{l} f) \quad u_0 = 407 \\ \quad u_1 = 4 - 81 + 407 = 330 \\ \quad u_{10} = -3 \\ \quad u_{11} = 4 \times 121 - 81 \times 11 + 407 = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc } (u_n) \text{ n'est pas croissante} \\ \\ \text{donc } (u_n) \text{ n'est pas décroissante} \end{array}$$

La suite  $(u_n)$  n'est ni croissante, ni décroissante.

### Exercice 6

1)



2) Méthode 1

$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ . La fonction  $f$  est croissante sur  $]0; +\infty[$   
donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

Méthode 2

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{1}{n+1} - \left(3 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

La suite  $(u_n)$  est croissante.

3) Méthode 1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  donc le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$

est :

|        |   |           |
|--------|---|-----------|
| $x$    | 0 | $+\infty$ |
| $f(x)$ |   | 3         |

2/7

D'après le tableau, on a: pour tout  $x \in \mathbb{R}^{++}$   $f(x) \leq 3$ .

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \leq 3$ .

### Méthode 2

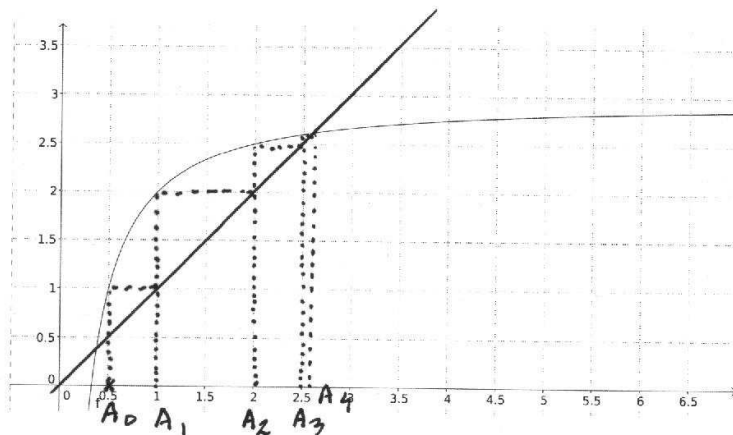
Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $\frac{1}{n} > 0$

donc  $-\frac{1}{n} < 0$

ainsi  $3 - \frac{1}{n} < 3$ .

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \leq 3$ .

### Exercice 7



### Exercice 13

1) a) de  $u_1$  à  $u_{n+1}$ , il y a  $n+1$  termes donc

de  $u_0$  à  $u_{n+1}$ , il y a  $n+2$  termes

b) de  $u_1$  à  $u_{p-1}$ , il y a  $p-1$  termes

c) de  $u_1$  à  $u_n$ , il y a  $n$  termes. On a compté 2 termes en trop ( $u_1$  et  $u_2$ ), donc de  $u_3$  à  $u_n$  il y a  $n-2$  termes

d) de  $u_1$  à  $u_{2p}$ , il y a  $2p$  termes. On a compté les termes  $u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$  en trop, c'est-à-dire  $p-1$  termes.

Ainsi de  $u_p$  à  $u_{2p}$  il y a  $2p - (p-1) = p+1$  termes.

2) Notons  $u_1$  le premier terme. Le 20<sup>ème</sup> terme est donc  $u_{20}$ .

De  $u_1$  compris à  $u_{20}$  compris, il y a 20 termes, donc on a ajouté 19 fois la raison.

Ainsi  $u_{20} = u_1 + 19r = -5 + 19 \times 12 = 223$ .

3) Notons  $u_0$  le premier terme. Le 5<sup>e</sup> terme est  $u_4$ .

Entre  $u_0$  compris et  $u_4$  compris, il y a 5 termes donc on a multiplié par la raison 4 fois. Ainsi  $u_4 = q^4 u_0$ .

Donc  $u_4 = 12^4 \times 16 = 331776$ .

De même entre  $u_0$  et  $u_{14}$  compris, il y a 15 termes donc on a multiplié 14 fois par la raison. Ainsi  $u_{14} = q^{14} u_0$ .

Donc  $u_{14} = 12^{14} \times 16$ .

4) Les multiples de 7 entre 100 et 1000 sont : 105, 112, 119, ..., 987, 994.

$$S = 105 + 112 + 119 + \dots + 987 + 994$$

$$S = 994 + 987 + 980 + \dots + 112 + 105$$

$$2S = 1099 + 1099 + 1099 + \dots + 1099 + 1099.$$

Il ne reste plus qu'à compter le nombre de termes égaux à 1099.

Méthode 1

De 994 à 105 on a un intervalle de longueur  $994 - 105 = 889$ .

La raison est égale à 7. On a donc ajouté  $\frac{889}{7} = 127$  fois la raison, c'est-à-dire qu'il y a 128 termes.

Méthode 2

$$105 = 7 \times 15$$

!

$$994 = 7 \times 142$$

On a autant de termes que d'éléments dans la liste

(15, 16, ..., 142). On a donc  $142 - 14 = 128$  termes.

Ainsi  $2S = 128 \times 1099$

et  $S = 72 \times 1099 = 81\,326$ .

5) Entre  $u_7$  compris et  $u_{10}$  compris, il y a 4 termes, donc on a multiplié 3 fois par la raison.

$$\text{Ainsi } u_{10} = q^3 \times u_7 \Leftrightarrow 108 = q^3 \times 32$$

$$\Leftrightarrow q^3 = \frac{108}{32}$$

$$\Leftrightarrow q^3 = \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{3}{2}$$

Entre  $u_0$  et  $u_7$  compris, il y a 8 termes, donc on a multiplié 7 fois par la raison.

$$\text{Ainsi } u_7 = q^7 \times u_0 \Leftrightarrow 32 = \left(\frac{3}{2}\right)^7 \times u_0$$

$$\Leftrightarrow u_0 = \frac{32 \times 2^7}{3^7}$$

$$\Leftrightarrow u_0 = \frac{4096}{2187}$$

6) Entre  $u_3$  et  $u_9$  compris, on a 7 termes, donc on a ajouté 6 fois la raison  $r$ . Ainsi  $6r = 222$  et  $r = 37$ .

Entre  $u_3$  et  $u_7$  compris, on a 5 termes, donc on a ajouté 4 fois la raison.

$$\text{Ainsi } u_7 = u_3 + 4r \Leftrightarrow u_7 = -15 + 4 \times 37$$

$$\Leftrightarrow u_7 = 133.$$

$$7) S = \frac{1}{4} + 1 + \frac{7}{4} + \frac{9}{2} + \dots + \frac{67}{4} + \frac{35}{2}$$

$S$  est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $\frac{3}{4}$ .

$$S = \frac{1}{4} + 1 + \frac{7}{4} + \frac{9}{2} + \dots + \frac{67}{4} + \frac{35}{2}$$

$$S = \frac{35}{2} + \frac{67}{4} + 16 + \dots + 1 + \frac{1}{4}$$

$$2S = \frac{71}{4} + \frac{71}{4} + \frac{71}{4} + \dots + \frac{71}{4} + \frac{71}{4}$$

De  $\frac{35}{2}$  à  $\frac{1}{4}$ , on a un intervalle de longueur  $\frac{35}{2} - \frac{1}{4} = \frac{69}{4}$

la raison est égale à  $\frac{3}{4}$ .

S/7



On a donc ajouté  $\frac{69}{\frac{3}{4}} = 23$  fois la raison.

Ainsi  $2S = 24 \times \frac{21}{4}$  et  $S = 213$ .

8]  $S = 18 + 54 + 162 + \dots + 39366$ .

$S$  est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 3.

$$S = 18 + 54 + 162 + \dots + 39366$$

$$3S = 54 + 162 + 486 + \dots + 118098$$

$$3S - S = 118098 - 18$$

$$\Leftrightarrow 2S = 118080$$

$$\Leftrightarrow S = 59040$$

9] On a:  $u_3 = u_4 - r$  et  $u_5 = u_4 + r$   
 $u_2 = u_4 - 2r$   $u_6 = u_4 + 2r$   
 $u_1 = u_4 - 3r$   $u_7 = u_4 + 3r$   
 $u_0 = u_4 - 4r$   $u_8 = u_4 + 4r$   
 $u_9 = u_4 + 5r$

$$\text{Ainsi } u_0 + u_1 + \dots + u_9 = (u_4 - 4r) + (u_4 - 3r) + \dots + (u_4 + 4r) + (u_4 + 5r) \\ = 10u_4 + 5r$$

$$\text{Donc } 55 = 10 \times 9 + 5r \Leftrightarrow 5r = 55 - 90$$

$$\Leftrightarrow r = -7$$

$$\text{De plus } u_0 = u_4 - 4r = 9 + 4 \times 7 = 37$$

10] •  $u_{n+1} - u_n = -5(n+1) + 3 - (-5n + 3)$   
 $= -5n - 5 + 3 + 5n - 3 = -5$

La suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $-5$ .

$$u_0 = 3 \quad u_1 = -2 \quad u_2 = -7$$

Pour passer de  $u_0$  à  $u_1$ , on a multiplié par  $-\frac{2}{3}$  et

pour passer de  $u_1$  à  $u_2$ , on a multiplié par  $\frac{7}{2}$ .

La suite  $(u_n)$  n'est pas géométrique.

- $v_n = 2^n \times 17 = 2(2^n \times 17) = 2v_n.$

La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 2.

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = 17 \\ v_1 = 34 \\ v_2 = 68 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc } v_1 - v_0 = 17 \\ \text{donc } v_2 - v_1 = 34. \end{array}$$

La suite  $(v_n)$  n'est pas arithmétique.

- $w_0 = 0$

$$w_1 = 6$$

$$w_2 = 14.$$

Ainsi  $w_1 - w_0 = 6$  et  $w_2 - w_1 = 8.$

La suite  $(w_n)$  n'est pas arithmétique.

En multipliant  $w_0$  par un nombre  $q$ , on obtient toujours 0.

Or  $w_1 \neq 0.$

Donc la suite  $(w_n)$  n'est pas géométrique.