

TD n° 13 : la fonction logarithme népérien.

Exercice 1

$$A = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2$$

$$B = \ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$$

$$D = \ln(2e^2) = \ln 2 + \ln(e^2) = \ln 2 + 2 \ln e = \ln 2 + 2 \times 1 = 2 + \ln 2$$

$$C = \ln 64 = \ln 2^6 = 6 \ln 2$$

$$E = \ln(64e) = \ln 64 + \ln e = 6 \ln 2 + 1$$

$$F = \ln \sqrt{32} = \frac{1}{2} \ln 32 = \frac{1}{2} \ln 2^5 = \frac{5}{2} \ln 2$$

$$G = \ln \frac{2}{e} = \ln 2 - \ln e = \ln 2 - 1$$

$$H = \ln \frac{32}{e} = \ln 32 - \ln e = \ln 2^5 - 1 = 5 \ln 2 - 1.$$

Exercice 2

$$A = \ln 10^3 = 3 \ln 10 = 3 \ln(2 \times 5) = 3 \ln 2 + 3 \ln 5 = 3a + 3b$$

$$B = \ln \frac{1}{10} = \ln 1 - \ln 10 = -\ln(2 \times 5) = -\ln 2 - \ln 5 = -a - b$$

$$C = \ln(8 \times 5) = \ln 8 + \ln 5 = \ln 2^3 + \ln 5 = 3 \ln 2 + \ln 5 = 3a + b$$

$$D = \ln 1 - \ln 20 = -\ln(4 \times 5) = -\ln 4 - \ln 5 = -2 \ln 2 - \ln 5 = -2a - b$$

$$\begin{aligned} E &= \ln(8 \times 10^3) = \ln 8 + \ln 10^3 = \ln 2^3 + 3 \ln 10 = 3 \ln 2 + 3(\ln 2 + \ln 5) \\ &= 6 \ln 2 + 3 \ln 5 = 6a + 3b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \ln(2000) = \frac{1}{2} \ln(2 \times 10^3) = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln 10^3) = \frac{1}{2} (\ln 2 + 3 \ln 10) \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2 + 3(\ln 2 + \ln 5)) = 2 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 5 = 2a + \frac{3}{2}b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \ln(2 \times 10^{-2}) = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln 10^{-2}) = \frac{1}{2} (\ln 2 - 2 \ln 10) = \frac{1}{2} (\ln 2 - 2(\ln 2 + \ln 5)) \\ &= \frac{1}{2} (-\ln 2 - 2 \ln 5) = -\frac{1}{2} \ln 2 - \ln 5 = -\frac{1}{2}a - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \ln(8 \times 10^{-7}) = \ln 8 + \ln 10^{-7} = \ln 2^3 - 7 \ln 10 = 3 \ln 2 - 7(\ln 2 + \ln 5) \\ &= -4 \ln 2 - 7 \ln 5 = -4a - 7b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \ln(4 \times 10^{-5}) = \ln 4 + \ln 10^{-5} = \ln 2^2 - 5 \ln 10 = 2 \ln 2 - 5(\ln 2 + \ln 5) \\ &= -3 \ln 2 - 5 \ln 5 = -3a - 5b \end{aligned}$$

Exercice 3

1) Soit D_f l'ensemble de définition de (E_1) .

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

$$\text{D'où } D_f =]-\frac{5}{2}; +\infty[.$$

$$(E_1) \Leftrightarrow \ln(2x+5) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow 2x+5 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -2.$$

Or -2 appartient à D_f .

L'ensemble des solutions de (E_1) est: $S = \{-2\}$.

2) Soit D_f l'ensemble de définition de (E_2)

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

$$\text{D'où } D_f =]\frac{5}{2}; +\infty[$$

$$(E_2) \Leftrightarrow \ln(2x-5) = \ln e$$

$$\Leftrightarrow 2x-5 = e$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5+e}{2}$$

Or $\frac{5+e}{2}$ appartient à D_f

L'ensemble des solutions de (E_2) est: $S = \left\{ \frac{5+e}{2} \right\}$

3) Soit D_f l'ensemble des solutions de (E_3)

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x-5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

$$\text{D'où } D_f =]\frac{5}{2}; +\infty[.$$

$$(E_3) \Leftrightarrow \ln(2x-5) = \ln e^2$$

$$\Leftrightarrow 2x-5 = e^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5+e^2}{2}$$

Or $\frac{5+e^2}{2}$ appartient à D_f .

L'ensemble des solutions de (E_3) est: $S = \left\{ \frac{5+e^2}{2} \right\}$

4) Soit D_f l'ensemble de définition de (E_4)

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

$$\text{D'où } D_f =] \frac{5}{2}; +\infty[$$

$$(E_4) \Leftrightarrow \ln(2x - 5) = \ln e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 + e^{-1}}{2}$$

Or $\frac{5 + e^{-1}}{2}$ appartient à D_f .

L'ensemble des solutions de (E_4) est: $S = \left\{ \frac{5 + e^{-1}}{2} \right\}$

5) Soit D_f l'ensemble de définition de (E_5)

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 32 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 32 \end{cases} \Leftrightarrow x > 32$$

$$\text{D'où } D_f =] 32; +\infty[$$

$$(E_5) \Leftrightarrow \ln((x-2)(x-32)) = \ln 2^6$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-32) = 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 32x - 2x + 64 = 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 34x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 34) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 34$$

Or 0 n'appartient pas à D_f et 34 y appartient.

L'ensemble des solutions de (E_5) est: $S = \{34\}$

6) Soit D_f l'ensemble de définition de (E_6)

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x-2)(x-32) > 0$$

On dresse le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	2	32	$+\infty$
$x-2$		-	0	+
$x-32$		-	-	0
$(x-2)(x-32)$		+	0	+

D'où $D_f =]-\infty; 2[\cup]32; +\infty[$.

$(E_6) \Leftrightarrow (x-2)(x-32) = 64$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=34$ d'après la question précédente

Or 0 et 34 appartiennent à D_f

L'ensemble des solutions de (E_6) est: $S = \{0; 34\}$

7) Soit D_f l'ensemble de définition de (E_7) .

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+7 > 0 \\ 4x-9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 7 \\ 4x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{2} \\ x > \frac{9}{4} \end{cases}$$

D'où $D_f =]\frac{9}{4}; \frac{7}{2}[$

$(E_7) \Leftrightarrow \ln \frac{-2x+7}{4x-9} = \ln \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{-2x+7}{4x-9} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3(-2x+7) = 4x-9$

$\Leftrightarrow -6x-4x = -9-21$

$\Leftrightarrow -10x = -30$

$\Leftrightarrow x = 3$

Or 3 appartient à D_f

L'ensemble des solutions de (E_7) est: $S = \{3\}$.