

TD n°14: la fonction logarithme népérien

Exercice 4

1) Soit D_f l'ensemble de définition de (I_1)

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2-3x > 0 \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; \frac{2}{3}[$$

$$(I_1) \Leftrightarrow \ln(2-3x) < \ln 1$$

$$\Leftrightarrow 2-3x < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 < 3x$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

Seules les valeurs de $]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$ appartenant à D_f

L'ensemble des solutions de (I_1) est $S =]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$

2) Soit D_f l'ensemble de définition de (I_2)

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1 > 0 \\ 3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}$$

$$\text{Donc } D_f =]\frac{1}{5}; +\infty[$$

$$(I_2) \Leftrightarrow 5x-1 \geq 3x+2$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

Toutes les valeurs appartenant à D_f , donc l'ensemble des solutions de (I_2) est: $S = [\frac{3}{2}; +\infty[$

3) Soit D_f l'ensemble de définition de (I_3)

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x > 0 \\ 4x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 1 \\ 4x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x > -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Donc } D_f =]-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}[$$

$$(I_3) \Leftrightarrow 1-3x \leq 4x+1$$

$$\Leftrightarrow 7x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

Seules les valeurs de $[0; \frac{1}{3}[$ appartiennent à D_f .

L'ensemble des solutions de (I_3) est $S = [0; \frac{1}{3}[$

4) Soit D_f l'ensemble de définition de (I_4)

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-4 > 0 \\ 3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{7} \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{4}{7}$$

$$\text{D'où } D_f =]\frac{4}{7}; +\infty[$$

$$(I_4) \Leftrightarrow \ln(7x-4) > \ln(3x+2)$$

$$\Leftrightarrow 7x-4 > 3x+2$$

$$\Leftrightarrow 4x > 6$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

Toutes les valeurs de $] \frac{3}{2}; +\infty[$ appartiennent à D_f .

L'ensemble des solutions de (I_4) est: $S =] \frac{3}{2}; +\infty[$

5) Soit D_f l'ensemble de définition de (I_5)

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x^2+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x > -1 \\ x(x+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x > -1 \\ x < -1 \text{ ou } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Donc } D_f =]1; +\infty[$$

$$(I_5) \Leftrightarrow \ln(x^2-1)(x+1) \geq \ln(x^2+x)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x+1) \geq x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x+1) - x(x+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[(x^2-1) - x] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-1) \geq 0$$

Le discriminant de x^2-x-1 est $\Delta = 1+4=5$

Ainsi x^2-x-1 a deux racines $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

On dresse le tableau de signes suivant:

x	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$	
$x+1$		+	+	$\times$
x^2-x+1	-	0	+	$\checkmark$
produit	-	0	+	

$$(I_5) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[\right.$$

Toutes ces valeurs appartiennent à $\mathbb{R}$, donc l'ensemble des solutions de (I_5) est $S = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[\right.$

6) Soit $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de (f_6)

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+3}{x-8} > 0 \\ x-8 \neq 0 \\ 4x^2+12x+9 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+3}{x-8} > 0 \\ x \neq 8 \\ (2x+3)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+3}{x-8} > 0 \\ x \neq 8 \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Pour résoudre $\frac{2x+3}{x-8} > 0$, on dresse le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	8	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
$x-8$	-	-	0	+
$\frac{2x+3}{x-8}$	+	0	-	+

$$\text{D'où } x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]8; +\infty[\\ x \neq 8 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]8; +\infty[$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{D}_f =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]8; +\infty[$$

$$(I_6) \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-8} > (2x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-8} - (2x+3)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3) - (2x+3)^2(x-8)}{x-8} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)[1-(2x+3)(x-8)]}{x-8} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)(1-(2x^2-16x+3x-24))}{x-8} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)(-2x^2+13x+25)}{x-8} > 0$$

Le discriminant de $-2x^2+13x+25$ est $\Delta = 169 + 8 \times 25$
 $= 369 = 9 \times 41$

Ainsi $-2x^2+13x+25$ a deux racines:

$$x_1 = \frac{-13+3\sqrt{41}}{-4} = \frac{13-3\sqrt{41}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{13+3\sqrt{41}}{4}$$

On a: $x_1 \approx 8,1$ et $x_2 \approx -1,6$ à 10^{-1} près.

On dresse le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	x_2	$-\frac{3}{2}$	8	x_1	$+\infty$
$2x+3$		-	-	0	+	+
$-2x^2+13x+25$		-	0	+	+	0
$x-8$		-	-	-	0	+
quotient		-	0	+	0	-

$$(I_6) \Leftrightarrow x \in]x_2; -\frac{3}{2}[\cup]8; x_1[$$

Or toutes ces valeurs appartiennent à $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions de (I_6) est:

$$S =] \frac{13-3\sqrt{41}}{4}; -\frac{3}{2}[\cup]8; \frac{13+3\sqrt{41}}{4}[$$

Exercice 7

1) $f_1(x) = x \ln x$.

L'ensemble de définition de f_1 est $D_f = \mathbb{R}^{++}$

$$f'_1(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

2) $f_2(x) = \frac{\ln x}{x}$

L'ensemble de définition de f_2 est $D_f = \mathbb{R}^{++}$

$$f'_2(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

3) $f_3(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

Soit D_f l'ensemble de définition de f_3 .

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} > 0$$

On dresse le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
x		-	-	0	+	
$x+1$		-	0	+	+	
$\frac{x}{x+1}$		+	//	-	0	+

$$\text{Donc } x \in D_f \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$$

$$\text{Ainsi } D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

$$f'_3(x) = \left(\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}}\right)' = \frac{\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x(x+1)}$$

4) $f_4(x) = 2x^2 - 4x + \ln x$.

L'ensemble de définition de f_4 est $D_f = \mathbb{R}^{++}$

$$f'_4(x) = 4x - 4 + \frac{1}{x}$$

5) $f_5(x) = x^2 \ln x - x^2$

L'ensemble de définition de f_5 est $D_f = \mathbb{R}^{++}$

$$\begin{aligned}
 f'_5(x) &= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} - 2x \\
 &= 2x \ln x + x - 2x \\
 &= 2x \ln x - x = x(2 \ln x - 1)
 \end{aligned}$$

6) $f_6(x) = (x^2+1) \ln x.$

L'ensemble de définition de f_6 est $D_f = \mathbb{R}^{++}$

$$\begin{aligned}
 f'_6(x) &= 2x \ln x + (x^2+1) \times \frac{1}{x} \\
 &= 2x \ln x + x + \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

7) $f_7(x) = \ln \frac{x}{x^2+1}$

Soit D_f l'ensemble de définition de f_7 .

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ car } x^2+1 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

D'où $D_f = \mathbb{R}^{++}$

$$\begin{aligned}
 f'_7(x) &= \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \times \frac{x^2+1}{x} = \frac{-x^2+1}{x(x^2+1)}
 \end{aligned}$$