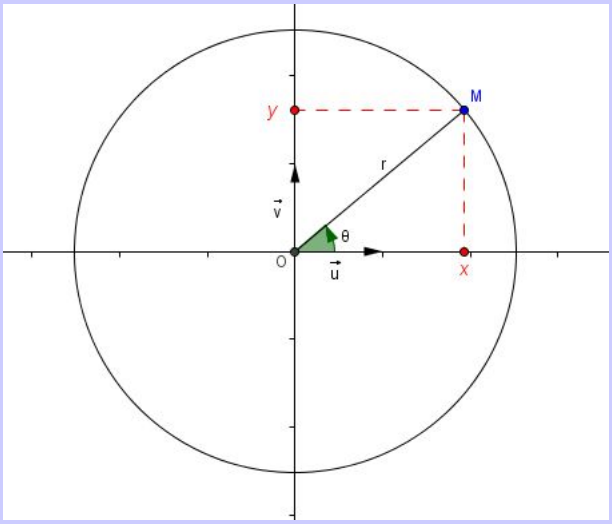
Chapitre 15 : Les nombres complexes (2)

1 Module et arguments d'un nombre complexe

Dans toute la suite, $(O, \vec{u}, \vec{v})$est un repère orthonormal du plan complexe.

Définition 1 : coordonnées polaires

Soit M un point du plan complexe. On peut repérer M par ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Si $M \neq O$, le point M est parfaitement repéré par la distance r qui le sépare à l'origine du repère et par une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.
Le couple $(r; \theta)$ constitue les coordonnées polaires de M.



Remarque : r est unique, contrairement à θ qui est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

Exemple 1

1. Après avoir placé les points dans un repère, déterminer les coordonnées polaires des points $A(3,0)$, $B(0,-2)$, $C(1,1)$, $D(-5,0)$, $E(0,1)$, $F(1,\sqrt{3})$ et $G(-3,3)$.
2. Après avoir placé les points dans un repère, déterminer les coordonnées cartésiennes des points $M[3,\pi]$, $N[2,\pi]$, $P[1,\frac{\pi}{4}]$, $Q[\frac{3}{2},\frac{5\pi}{6}]$, $R[4,-\frac{\pi}{3}]$ et $S[2,\frac{3\pi}{4}]$.

Définition 2 : module d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y réels).
Le module de z est le nombre positif noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Remarques :
- Le module de z représente la distance OM où M est l'image de z.

- Si z est réel alors le module de z est sa valeur absolue.
- $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.
- $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

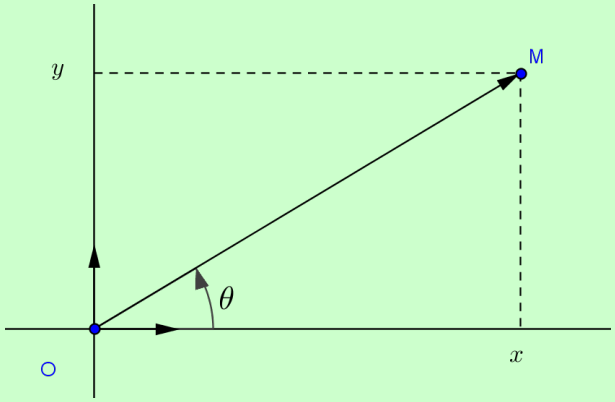
Définition 3 : arguments d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels) et M son image dans le plan complexe.
Un argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
Si θ est un argument de z alors on note $\arg(z) = \theta$.

Remarque :
Le complexe 0 n'a pas d'argument.

En résumé :

Propriété 1 : changement de coordonnées



1. Soit $(r;\theta)$ les coordonnées polaires d'un point $M \neq O$ du plan complexe.
   Alors ses coordonnées cartésiennes sont $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
2. Soit $(x;y)$ les coordonnées cartésiennes d'un point $M \neq O$ dans le plan complexe.
   Alors on a $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arg(z)$ est tel que $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
3. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument à un multiple de 2π près.

Définition 4 : forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul de coordonnées polaires $[r;\theta]$; Alors l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique du complexe z.

Notation : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est noté $[r;\theta]$;

Exemple 2

Déterminer la forme trigonométrique de :

1. $z_1 = 1+\mathrm{i}$
2. $z_2 = 3\mathrm{i}$
3. $z_3 = -7$
4. $z_4 = 2-2i$
5. $z_5 = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$
6. $z_6 = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$
7. $z_7 = 5-5\mathrm{i}$
8. $z_8 = 6\sqrt{3}-6\mathrm{i}$

Propriété 2 : propiétés du module et de l'argument

1. Pour tout nombre complexe z non nul, on a $\left|\overline{z}\right| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.
2. Pour tout nombre complexe z non nul, on a $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$.
3. Pour tout nombre complexe z non nul, on a z est réel $\iff \arg(z) = 0 + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
4. Pour tout nombre complexe z non nul, on a z est imaginaire pur $\iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Propriété 3 : module et argument d'un produit ou quotient

1. Pour tous nombres complexe z et z', on a $\left|z + z'\right| \leq |z| + \left|z'\right|$ *(Inégalité triangulaire).*
2. Pour tout nombre complexe z et z' non nuls, on a $\left|z.z'\right| = |z|.\left|z'\right|$ et $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$.
3. Pour tout nombre complexe z non nul et tout entier naturel n non nul, on a $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n.\arg(z)$.
4. Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.

Avec la notation précédente :

$[r;\theta].\left[r';\theta'\right] = \left[r.r';\theta+\theta'\right]$.

$[r;\theta]^n = [r^n;n\theta]$.

$\dfrac{[r;\theta]}{[r';\theta']} = \left[\dfrac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$.

Exemple 3

1. On considère le complexe $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Écrire le nombre complexe $Z = z^{2018}$ sous forme trigonométrique et en déduire sa forme algébrique.
2. Même question avec $z = (1+\mathrm{i})^{2020}$
3. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

   a. Écrire z_1, z_2 et Z sous forme trigonométrique.

   b. Écrire Z sous forme algébrique et en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Propriété 4 : nombres complexes et géométrie

1. Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives alors $AB = \left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|$
2. Soit A et B deux points distincts du plan complexe, alors $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right)$

Remarque

Grâce aux nombres complexes, on est capable d'évaluer l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$
En effet :

Exemple 4

On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = -6+2i, z_B = 6+8i$ et $z_C = -10i$.
   Déterminer la nature du triangle ABC.
2. Même question avec les points A, B et C d'affixes $z_A == -1+i\sqrt{3}, z_B = 2$ et $z_C = -1-i\sqrt{3}$.
3. On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = -4+i, z_B = -1+2i$ et $z_C = -5+4i$.
   Déterminer la forme algébrique du quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC.
4. Même question avec les points A, B et C tels que $z_A = 3-2i, z_B == -3-4i$ et $z_C = 1+4i$.
5. Soit M un point d'affixe z. Déterminer et représenter l'ensemble des points M vérifiant $|z-3i| = 2$.
6. Même question avec $|z+1-2i| = 3$.
7. Même question avec $|z-1+4i| = |z+3+i|$.
8. Même question avec $|z+3-5i| = |z-4+i$.
9. Même question avec $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$.
10. Même question avec $\arg(z) = -\dfrac{2\pi}{3}$
11. On considère les points A, B et C tels que $z_A = 1+2i, z_B = 5+4i$ et $z_c = 4+11i$
    Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$
12. Même question avec $z_A = -6+4i, z_B = 8-i$ et $z_c = 4-2i$ et l'angle $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$

2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 5 : forme exponentielle d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée écriture ou forme exponentielle du complexe z

Remarque
Si on dérive la fonction définie par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, on obtient $f'(\theta) = if(\theta)$.
Ceci explique que nous notions $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Propriété 5 : propriétés avec la forme exponentielle

Soit $(r, r') \in \mathbb{R}^2$, $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
2. Si $r \neq 0$ alors $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. Si $r \neq 0$ alors $\dfrac{r'e^{i\theta'}}{re^{i\theta}} = \dfrac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
4. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
5. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
6. $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Exemple 5

1. Déterminer un module et un argument des nombres complexes suivants :
   $z_1 = e^{-i\pi/2}$ $z_2 = -2e^{-i\pi/4}$ $z_3 = -4e^{-4i\pi}$ $z_4 = -ie^{i\pi}$
2. Même question avec ;
   $z_5 = e^{3i\pi/2}$ $z_6 = -5e^{4i\pi/3}$ $z_7 = -3e^{-5i\pi/6}$ $z_8 = 4ie^{5i\pi/3}$
3. Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :
   $z_1 = 1 + i$ $z_2 = -\sqrt{3}$ $z_3 = 5i$ $z_4 = -8i$
   $z_5 = -1 + i$ $z_6 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}(1 + i)$ $z_7 = (-1 + i)\left(\sqrt{3} + i\right)$ $z_8 = \dfrac{-2 + 2i}{1 - i\sqrt{3}}$
4. Même question avec :
   $z_1 = 2 - 2i$ $z_2 = -\dfrac{2}{5}i$ $z_3 = 1 + \sqrt{3}$ $z_4 = -\sqrt{2}i$
   $z_5 = -3 + 3i$ $z_6 = -5(1 - i)$ $z_7 = (1 + i)(1 - \sqrt{3}i)$ $z_8 = \dfrac{1 - i}{\sqrt{3} + i}$

Exemple 6

1. Soit $z_1 = 3\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$.
   - **a.** Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
   - **b.** Écrire $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $z_1 \times z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme exponentielle.
   - **c.** Écrire $(z_1)^{10}$ et $(z_2)^4$ sous forme exponentielle.
2. Même question avec $z_1 = -3 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 5 - 5\sqrt{3}\mathrm{i}$
3. Déterminer la forme exponentielle de $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{1-\mathrm{i}} - \dfrac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^2}$
4. Même question avec $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^3} - \dfrac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3}$