Chapitre 16 : Intégration

1 Primitives

Définition 1 : primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On appelle **primitive** de f sur I, toute fonction F dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Remarque
On ne détermine pas de primitive sur une union d'intervalles mais sur un intervalle seulement. Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet comme primitive la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \ln(-x)$ sur $]-\infty,0[$.

Exemple 1
Trouver une primitive des fonctions suivantes sur chacun des intervalles où elles sont définies.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$
2. $f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 8$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x}$
5. $f(x) = \cos x - 2\sin(3x)$
6. $f(x) = \sin(2x) - 3\cos(3x)$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$
9. $f(x) = \dfrac{5}{x^3}$
10. $f(x) = -\dfrac{3}{x^2}$
11. $f(x) = 5\mathrm{e}^{4x-5}$
12. $f(x) = -2\mathrm{e}^{3x}$

Propriété 1 : primitives d'une même fonction

Soit F une primitive de f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel k, la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.
De plus, toute primitive de f est de ce type.

Propriété 2 : unicité de la primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Étant donné un réel x_0 de I et un réel quelconque y_0, il existe **une unique primitive** F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple 2
Trouver la primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

1. $f(x) = 1 - x + x^2$ I=$\mathbb{R}$ $x_0 = 1$ $y_0 = 0$
2. $f(x) = 5 + x^3 - 3x^4$ I=$\mathbb{R}$ $x_0 = 1$ $y_0 = 0$
3. $f(x) = -2\cos(2x)$ I=$\mathbb{R}$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ $y_0 = 1$
4. $f(x) = 2\sin(4x) + \cos x$ I=$\mathbb{R}$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ $y_0 = 1$
5. $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ I=$\mathbb{R}^{+*}$ $x_0 = 1$ $y_0 = 1$

Remarque
Pour déterminer une primitive d'une fonction, on lit le tableau des dérivées à "l'envers" et on ajuste avec un **coefficient multiplicatif** en dérivant.
Si jamais, on ne trouve pas ainsi une primitive de la fonction, il peut être intéressant de changer l'écriture de la fonction.

Exemple 3
Trouver une primitive des fonctions suivantes sur chacun des intervalles où elles sont définies.

1. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{5x^2+5x+12}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ (on écrira $f(x)$ sous la forme de $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$)
4. $f(x) = \dfrac{7x-9}{x^2-2x-3}$ (on écrira $f(x)$ sous la forme de $\dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{x+1}$)

2 Intégrale d'une fonction et aire

Définition 2 : intégrale d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre réel noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et défini par $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

Remarques

1. Le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas effectivement de la primitive choisie.
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ se lit "somme ou intégrale de a à b de $f(t)\mathrm{d}t$".
3. Les réels a et b sont les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$
4. On écrit $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

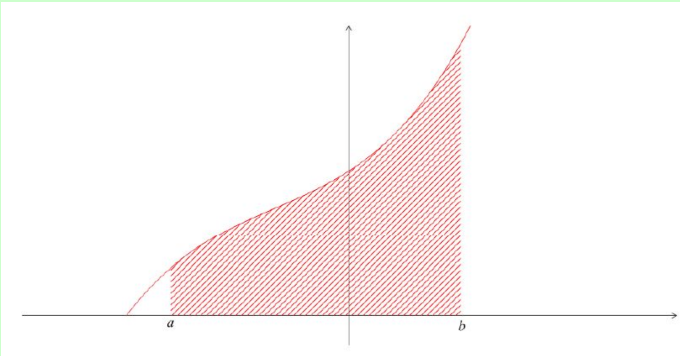
5. Le symbole $\int$ représente une somme infinie de "petits" rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur $\mathrm{d}x$.

Exemple 4
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-2}^{3}(t^4-5t^2+3)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^3-3t)\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{2}^{5}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{3x}{x^2+3}\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos(3x)\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(4x)\mathrm{d}x$

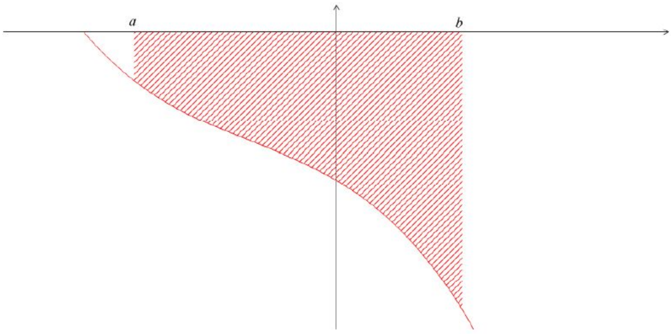
Propriété 3 : aire sous une courbe

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ avec $a \leqslant b$.
L'aire du domaine "sous la courbe", c'est-à-dire l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de la fonction f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.



Remarques

1. L'unité d'aire est alors égale à l'aire du rectangle unité, c'est-à-dire 1 unité en abscisse et 1 unité en ordonnée.
2. Si la fonction est négative sur $[a;b]$, alors l'aire entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\displaystyle -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$



Exemple 5
Calculer, en unités d'aires, l'aire sous la courbe d'équation $y = f(x)$ entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
On admettra que les fonctions suivantes sont positives sur l'intervalle considéré.

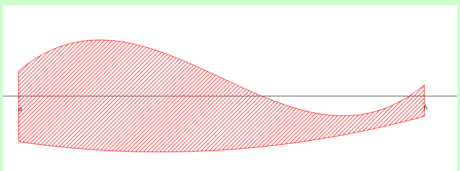
1.	$f(x) = x^2 + x + 1$	$a = -2$	$b = 3$
2.	$f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$	$a = -1$	$b = 2$
3.	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$a = 1$	$b = 5$
4.	$f(x) = \dfrac{5}{x+2}$	$a = 2$	$b = 7$
5.	$f(x) = \mathrm{e}^{2x}$	$a = -3$	$b = 2$
6.	$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$	$a = 0$	$b = 4$

Exemple 6

1. On considère un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ d'unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.
   Calculer, en cm^2, l'aire du domaine sous la courbe de la fonction "carré" entre les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.
2. On considère un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ d'unité graphique 5 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.
   Calculer, en cm^2, l'aire du domaine sous la courbe de la fonction "cube" entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

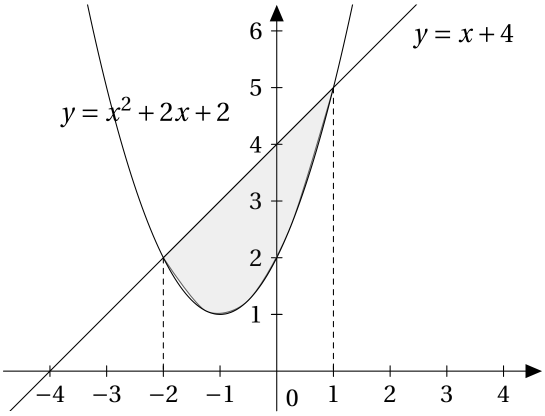
Propriété 4 : aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels de I.
Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, l'aire du domaine limité par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ est égale à $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t)\mathrm{d}t$, c'est-à-dire le domaine défini par $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$

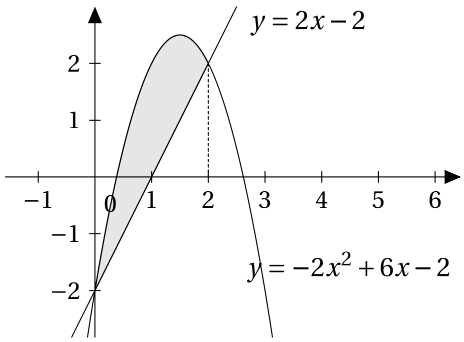


Exemple 7
Calculer en unités d'aires l'aire de chacun des domaines coloriés :
(on admettra que les informations données par le graphique concernant la position relative des deux courbes sont exactes)

1. Situation n°1



2. Situation n°2



3 Premières propriétés

Propriété 5 : primitive qui s'annule en a

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I.
La fonction définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple 8
Déterminer dans chacun des cas la primitive de la fonction f sur l'intervalle I qui s'annule en a :

1. $f(x) = x^3 - 2x + 2$ — $a = 2$ — $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^4 + x^2 + 5$ — $a = 1$ — $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{5}{x} + x^2$ — $a = -4$ — $I = \mathbb{R}^{-*}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$ — $a = 4$ — $I = \mathbb{R}^{+*}$
5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ — $a = \mathrm{e}$ — $I = \mathbb{R}^{+*}$
6. $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 3$ — $a = 0$ — $I = \mathbb{R}$

Propriété 6 : relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c des réels de I.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 9

Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(t)\mathrm{d}t$ après avoir vérifié que la fonction est continue sur $[-3;3]$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-3;2] \\ 2x-6 & \text{si } x \in]2;3] \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-3;0[\\ x^2 & \text{si } x \in [0;1[\\ -x+2 & \text{si } x \in [1;3] \end{cases}$

Propriété 7 : linéarité de l'intégrale

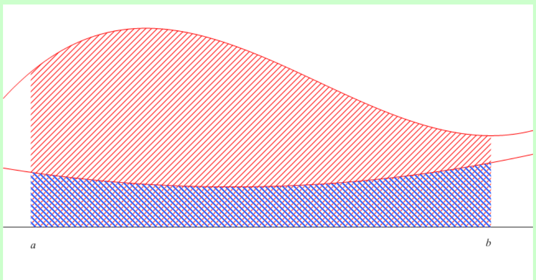
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Alors, pour tous réels α et β :
$\displaystyle\int_a^b \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Propriété 8 : positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b des réels de I.
Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$

Propriété 9 : conservation de l'ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b des réels de I.
Si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$



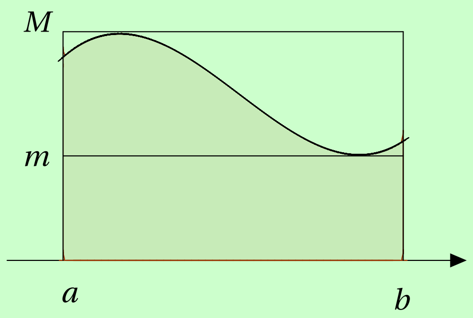
Exemple 10

1. Comparer les intégrales $I = \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t$ et $J = \int_0^1 t^4 \mathrm{d}t$
2. Même question avec $I = \int_0^1 \sqrt{t} \mathrm{d}t$ et $J = \int_0^1 t^3 \mathrm{d}t$
3. Même question avec $I = \int_0^1 t\mathrm{e}^{\cos t} \mathrm{d}t$, $J = \int_0^1 t^2\mathrm{e}^{\cos t} \mathrm{d}t$ et $K = \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{e}^{\cos t} \mathrm{d}t$

Propriété 10 : inégalités de la moyenne

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$.
Si les réels m et M sont tels que $m \leqslant f(t) \leqslant M$ pour t de $[a,b]$, alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$



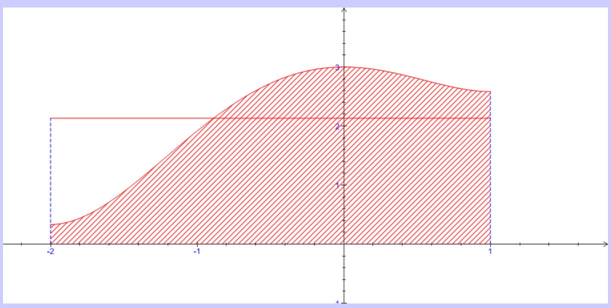
Exemple 11

1. Soit $I = \int_0^2 \cos(x^2)\mathrm{d}x$. Montrer que $-2 \leqslant I \leqslant 2$.
2. Soit $J = \int_0^1 x^2\cos(x^2)\mathrm{d}x$. Montrer que $0 \leqslant J \leqslant 1$.
3. Soit $K = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$. Montrer que $0 \leqslant K \leqslant 1$.

Définition 3 : valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a \neq b$.

La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$



Exemples 12
Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = -x + x^2 + x^3$ I=$[-2, 1]$
2. $f(x) = -x^2 + 2x$ I=$[-1, 2]$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ I=$[1, n]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

4 Calcul d'intégrales

Propriété 11 : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que les dérivées u' et v' soient continues sur $[a, b]$.
Alors $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$

Remarque 1
Pour retenir cette égalité, il suffit d'intégrer l'égalité donnant la dérivée d'un produit

Remarque 2
Il y a plusieurs choix possibles pour définir les fonctions u et v. Il faut choisir le bon, celui qui permet de calculer l'intégrale (très souvent un choix complique le calcul et un autre le simplifie).

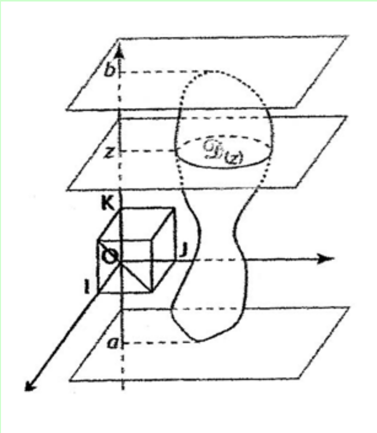
Exemples 13
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t \ln t \, \mathrm{d}t$
2. $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$
3. $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$
4. $\mathrm{L} = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} t \cos t \, \mathrm{d}t$

5 Applications du calcul intégral

Propriété 12 : calcul de volume

Dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$ de l'espace, S est un solide limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ (avec $a < b$).
$A(z)$ désigne l'aire de la section $D(z)$ du solide S par le plan parallèle à (OIJ) et de cote z avec $a \leqslant z \leqslant b$.
L'unité de volume est le volume du parallélépipède rectangle construit sur O, I, J et K.
Si A est une fonction continue sur $[a, b]$, alors le volume V du solide S est : $V = \displaystyle\int_a^b A(z)\mathrm{d}z$



Exemples 14

1. Calculer le volume d'une sphère de rayon R.
2. Calculer le volume d'un cône de rayon R et de hauteur h.