Exemple 4

$$I_1 = \int_{-2}^{3} (t^4 - 5t^2 + 3)\,dt = \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{5}{3}t^3 + 3t\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\times 3^5 - \frac{5}{3}\times 3^3 + 3\times 3\right) - \left(\frac{1}{5}(-2)^5 - \frac{5}{3}(-2)^3 + 3\times(-2)\right)$$

$$= \left(\frac{243}{5} - 45 + 9\right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{40}{3} - 6\right)$$

$$= \frac{243}{5} - 36 + \frac{32}{5} - \frac{40}{3} + 6$$

$$= 110 - 30 - \frac{40}{3}$$

$$= 80 - \frac{40}{3}$$

$$= \frac{200}{3}$$

3)

$$\int_2^5 \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln t\right]_2^5 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}$$

5)

$$\int_{-1}^{2} e^{-3x}\,dx = \left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{-1}^{2} = \frac{e^{-6}}{-3} + \frac{e^{3}}{3}$$

$$= \frac{e^3 - e^{-6}}{3}$$

7)

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

avec $u = x^2+1$

$$= \left[\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

9) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\sin(3\pi) - \frac{1}{3}\sin 0$

$= 0$

Exemple 5

1) Comme f est positive sur $[-2; 3]$ (admis dans cet exemple) l'aire cherchée est égale à $I = \displaystyle\int_{-2}^{3} (x^2 + x + 1)\,dx$

$$I = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{3} = \frac{1}{3}\times 3^3 + \frac{1}{2}\times 3^2 + 3 - \left(\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + (-2)\right)$$

$$= 9 + \frac{9}{2} + 3 + \frac{8}{3} - 2 + 2$$

$$= 12 + \frac{9}{2} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{72 + 27 + 16}{6} = \frac{115}{6} \text{ ua}$$

L'aire cherchée est égale à $\frac{115}{6}$ ua.

3) Comme la fonction inverse est positive sur $[1;5]$ l'aire cherchée est égale à

$$I = \int_1^5 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 \text{ ua}$$

L'aire cherchée est égale à $\ln 5$ ua.

5) Comme la fonction définie par $f(x) = e^{2x}$ est positive sur $[-3;2]$, l'aire cherchée est égale à $I = \int_{-3}^{2} e^{2x}\,dx$.

$$I = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-3}^{2} = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^{-6} = \frac{e^4 - e^{-6}}{2} \text{ ua.}$$

Exemple 6

1) La fonction "carré" est positive sur $[-1;2]$ donc l'aire cherchée est égale à $I = \int_{-1}^{2} x^2\,dx$

$$I = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\times 2^3 - \frac{1}{3}\times(-1)^3 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3 \text{ u.a}$$

$$\text{Or}\quad 1 \text{ ua} = \underbrace{2\text{ cm}}_{\text{unité sur l'axe des abscisses}} \times \underbrace{0{,}5\text{ cm}}_{\text{unité sur l'axe des ordonnées}} = 1\text{ cm}^2$$

L'aire cherchée est égale à 3 cm^2.

Exemple 7

1) On admet dans cet exemple que si $x \in [-2;1]$ alors $x^2+2x+2 \leq x+4$.

L'aire cherchée est égale à $I = \int_{-2}^{1} \left((x+4)-(x^2+2x+2)\right)dx$

$$I = \int_{-2}^{1} (-x^2-x+2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right) - \left(-\frac{1}{3}\times(-8) - \frac{1}{2}\times 4 - 4\right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = -3+2+2+4-\frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ u.a}$$

Exemple 8

1) $$F(x) = \int_{2}^{x} (t^3-2t+2)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - t^2 + 2t\right]_{2}^{x}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2x - \left(\frac{1}{4}\times 2^4 - 2^2 + 2\times 2\right)$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2x - 4$$

La primitive de f qui s'annule en 2 est définie par $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2x - 4$.

3] $F(x) = \int_{-4}^{x} \left(\frac{5}{t} + t^2\right) dt = \left[5\ln(-t) + \frac{1}{3}t^3\right]_{-4}^{x}$

$$= \left(5\ln(-x) + \frac{1}{3}x^3\right) - \left(5\ln 4 + \frac{1}{3}(-4)^3\right)$$

$$= 5\ln(-x) + \frac{1}{3}x^3 - 5\ln 4 + \frac{64}{3}.$$

La primitive de f sur $\mathbb{R}^{-*}$ qui s'annule en -4 est définie par $F(x) = 5\ln(-x) + \frac{1}{3}x^3 - 5\ln 4 + \frac{64}{3}$.

5] $F(x) = \int_{e}^{x} \frac{\ln t}{t} dt = \int_{e}^{x} \frac{1}{t} \times \ln t \, dt$

$u'u$ avec $u = \ln t$ $\downarrow$ $\frac{1}{2}u^2$

$$= \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_{e}^{x}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}(\ln e)^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}$$

La primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en e est définie par $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}$.