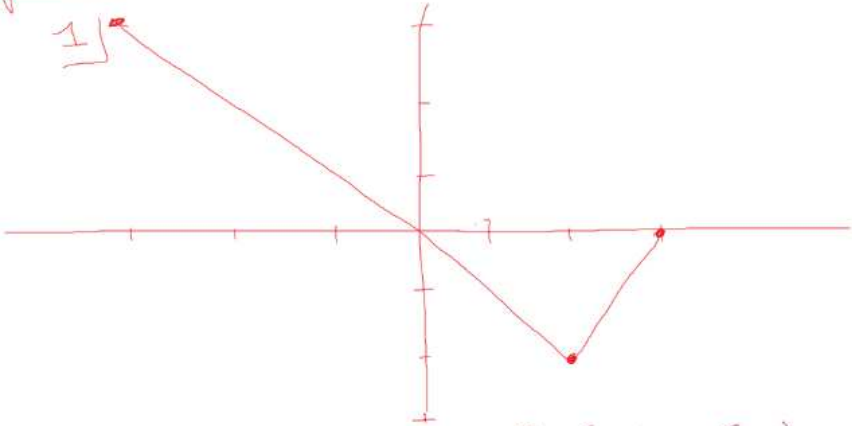
Exemple 9

1)



Sur $[-3;2[$ et sur $]2;3[$, la fonction f est un polynôme donc continue.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -x = -2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 2x-6 = -2 \\ f(2) = -2 \end{array}\right\} \text{ donc la fonction } f \text{ est continue en } 2.$$

Ainsi f est continue sur $[-3;3]$.

$$I = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{2} -x\,dx + \int_{2}^{3} (2x-6)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{2} + \left[x^2-6x\right]_{2}^{3}$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}\times 4\right) - \left(-\frac{1}{2}\times 9\right)\right] + \left[(9-18)-(4-12)\right]$$

$$= -2 + \frac{9}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

Exemple 10

1) Sur $[0;1]$, on a : $t^4 \leq t^2$

Donc $\int_0^1 t^4 dt \leq \int_0^1 t^2 dt$

D'où $J \leq I$.

3) Sur $[0;1]$, on a : $t^2 \leq t \leq \sqrt{t}$

en multipliant par $e^{\cos t}$ qui est positif, on obtient

$$t^2 e^{\cos t} \leq t e^{\cos t} \leq \sqrt{t}\, e^{\cos t}$$

Ainsi $\int_0^1 t^2 e^{\cos t} dt \leq \int_0^1 t e^{\cos t} dt \leq \int_0^1 \sqrt{t}\, e^{\cos t} dt$

D'où $J \leq I \leq K$.

Exemple 11

1) $I = \int_0^2 \cos(x^2)dx$

Or pour tout $x \in [0;2]$ on a : $-1 \leq \cos(x^2) \leq 1$

Donc $-1(2-0) \leq I \leq 1(2-0)$

c'est-à-dire $-2 \leq I \leq 2$.

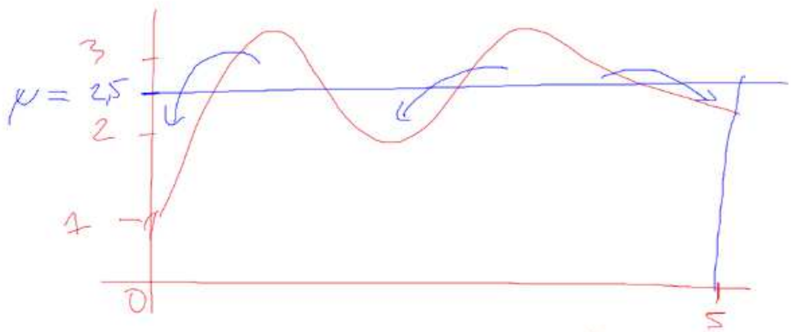
3) $K = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4} dt$

Sur $[0;1]$
$0 \leq t^2 \leq 1$
$0 \leq t^4 \leq 1$
$1 \leq 1+t^4 \leq 2$
$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^4} \leq 1$

$0 \leq \frac{t^2}{1+t^4} \leq 1$

donc $0(1-0) \leq K \leq 1(1-0)$

$0 \leq K \leq 1$



aire sous la courbe : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

aire du rectangle de hauteur μ : $\mu(b-a)$

Si μ est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$

alors $\displaystyle \mu(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt$

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Exemple 12

1) $$\mu = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1}(-x + x^2 + x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + \frac{16}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} - 2\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{12-6+3}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{4}.$$

3)
$$\mu = \frac{1}{n-1}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n-1}\Big[\ln x\Big]_1^n$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\ln n - \ln 1\right) = \frac{\ln n}{n-1}.$$

Exemple 13

$$I = \int_1^e t\ln t\,dt$$

1er choix $\quad u = t \quad v' = \ln t$

2e choix $\quad u = \ln t \quad v' = t$

Avec le 1er choix

$$u = t \qquad v' = \ln t$$
$$u' = 1 \qquad v = ??$$

Avec le 2e choix

$$u = \ln t \qquad v' = t$$
$$u' = \frac{1}{t} \qquad v = \frac{t^2}{2}$$

$$I = \Big[t\ln t\Big]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t}\times\frac{t^2}{2}\,dt$$
$$= \left(e\ln e - 1\times\ln 1\right) - \int_1^e \frac{t}{2}\,dt$$
$$= e - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = e - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$
$$= -\frac{e^2}{4} + e + \frac{1}{4}.$$

3] $K = \int_0^1 t^2 e^{-t}\,dt$

<u>1er choix</u> $u = t^2 \quad v' = e^{-t}$

<u>2e choix</u> $u = e^{-t} \quad v' = t^2$

<u>3e choix</u> $u = t \quad v' = te^{-t}$

<u>4e choix</u> $u = te^{-t} \quad v' = t$

<u>Avec le 1er choix</u>

$$u = t^2 \quad v' = e^{-t}$$
$$u' = 2t \quad v = -e^{-t}$$

$$K = \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 2t(-e^{-t})\,dt$$

$$K = \left(-e^{-1} - (-0)\right) + \int_0^1 2te^{-t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 te^{-t}\,dt$$

on pose $u = t \quad v' = e^{-t}$

$u' = 1 \quad v = -e^{-t}$

$$K = -\frac{1}{e} + 2\left(\left[-te^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\,dt\right)$$

$$= -\frac{1}{e} + 2\left(-e^{-1} - 0 + \left[-e^{-t}\right]_0^1\right)$$

$$= -\frac{1}{e} + 2\left(-\frac{1}{e} + \left(-e^{-1} + e^0\right)\right)$$

$$= -\frac{5}{e} + 2.$$