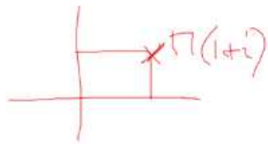
$$e^{i\theta} = [1;\theta]$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Exemples

3] $z_1 = 1 + i = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$



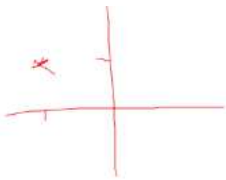
$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = -\sqrt{3} = [\sqrt{3}; \pi] = \sqrt{3}\, e^{i\pi}$

$z_3 = 5i = \left[5; \frac{\pi}{2}\right] = 5 e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_4 = -8i = \left[8; \frac{3\pi}{2}\right] = 8 e^{3i\frac{\pi}{2}}$

$z_5 = -1 + i = \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$



$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}}(1+i) = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}; \pi\right]\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

$= \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \pi + \frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \frac{5\pi}{4}\right]$

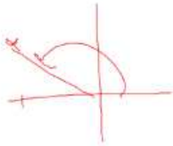
$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$z_7 = (-1+i)(\sqrt{3}+i) = \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right] \times (\sqrt{3}+i)$

$= \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]\left[2; \frac{\pi}{6}\right] = \left[2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right]$

$= 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$$z_8 = \frac{-2+2i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\left[2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]}{\left[2; -\frac{\pi}{3}\right]}$$



$$= \left[\frac{2\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \left[\sqrt{2}; \frac{13\pi}{12}\right] = \sqrt{2}\, e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

Exemple 6

1) a) $z_1 = 3\sqrt{3} - 3i$

$|z_1| = \sqrt{27+9} = 6$

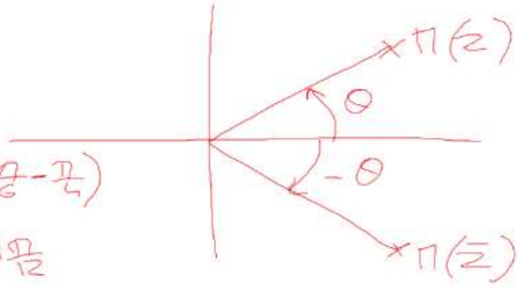
$\cos(\arg(z_1)) = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ } donc on peut prendre

$\sin(\arg(z_1)) = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ } $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}$.

Ainsi $z_1 = 6e^{-\frac{i\pi}{6}}$

$z_2 = 2 - 2i = \left[2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$

b) $\overline{z_1} = 6e^{\frac{i\pi}{6}}$



$\overline{z_2} = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$z_1 \times z_2 = 12\sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= 12\sqrt{2}\, e^{-5i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6e^{-\frac{i\pi}{6}}}{2\sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\pi}{6} + \frac{i\pi}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{12}}$$

c) $z_1^{10} = \left(6e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)^{10} = 6^{10} e^{-\frac{10i\pi}{6}}$

$$= 6^{10} e^{-\frac{5i\pi}{3}}$$

$$z_2^4 = \left(2\sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^4 = 64\, e^{-i\pi} = 64\, e^{i\pi}$$

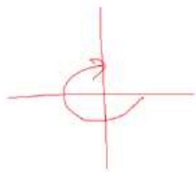
3)

$$z = \frac{(1+i)^3}{1-i} - \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} - \frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4}{\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,e^{3i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}} - \frac{4e^{-i\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

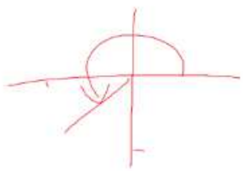
$$= 2e^{i\pi} - 2e^{-3i\frac{\pi}{2}}$$

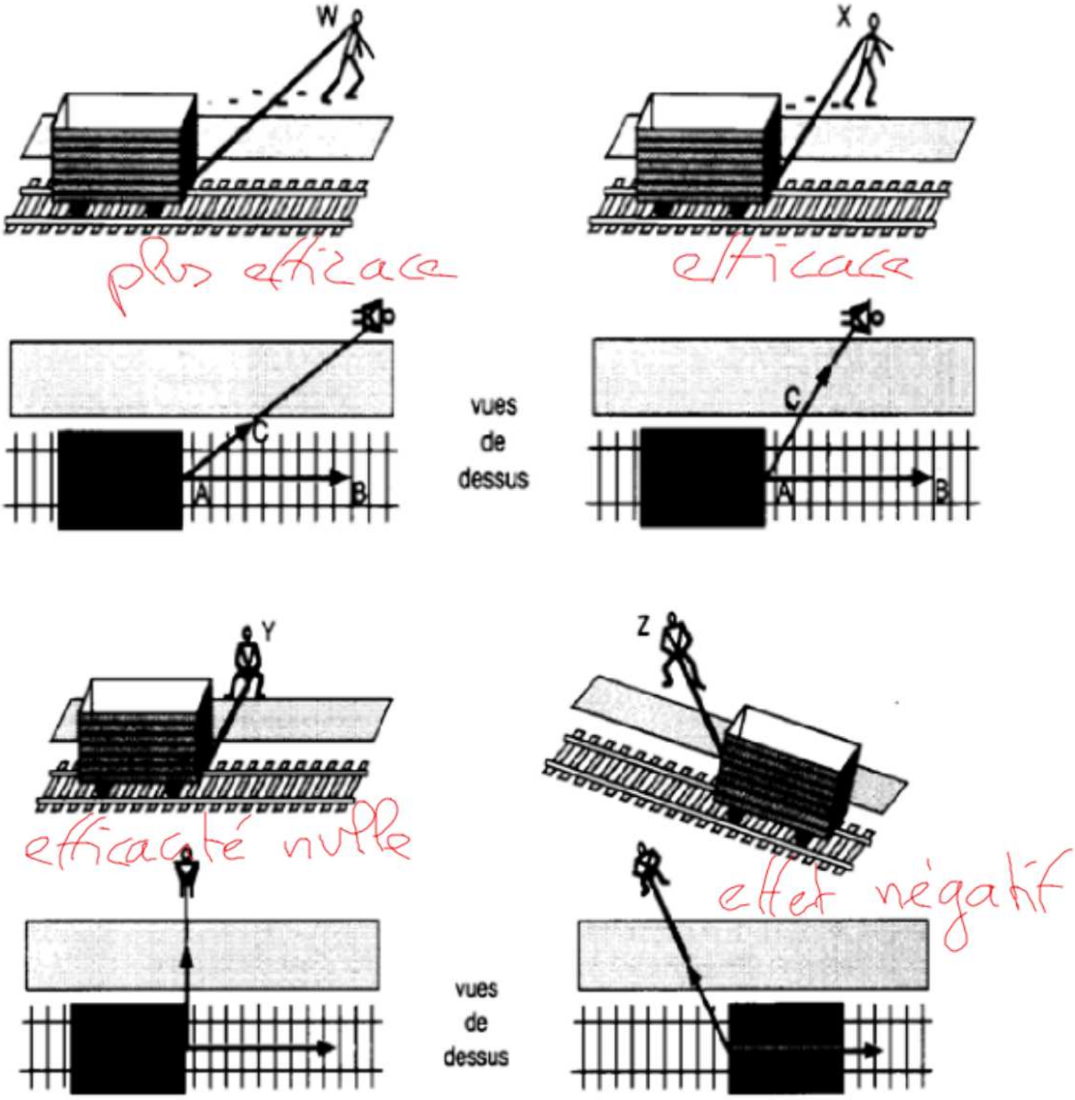


$$= 2\times(-1) - 2\times i$$

$$= -2-2i$$

$$= 2\sqrt{2}\,e^{-3i\frac{\pi}{4}}$$





plus efficace

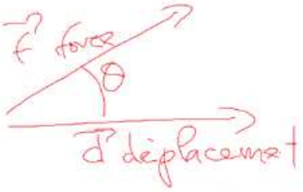
efficace

efficacité nulle

effet négatif

- Plus l'angle est petit, plus l'homme est efficace.
- Si l'angle est droit, l'efficacité est nulle
- Si l'angle est plus grand qu'un angle droit, l'efficacité est négative.

On cherche une fonction mathématique qui a ces 3 propriétés



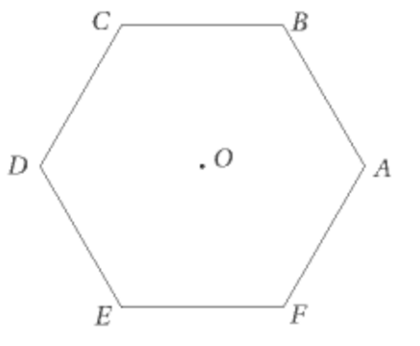
On modélise la situation par : $\cos\theta \times \|\vec{d}\| \times \|\vec{f}\|$

Cette expression est le produit scalaire de $\vec{f}$ par $\vec{d}$

On note : $\vec{f} \cdot \vec{d} = \|\vec{f}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos\theta$

Exemple 1

On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O tel que $AB = 2$.



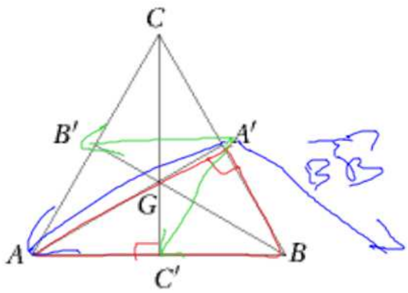
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$ $= OB \times OA \times \cos(\widehat{BOA}) = 2 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3} = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$
2. $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE}$ $= OD \times OE \times \cos(\widehat{DOE}) = 2$
3. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CB}$ $= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = 2$
4. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{FE}$ $= \overrightarrow{CB} \cdot (-\overrightarrow{CB}) = CB \times CB \times \cos\pi = -4$
5. $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FA}$ $= (2\overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OB} = 2OB \times OB \times \cos 0 = 4 \times 2 \times 1 = 8$

Exemple 2

ABC est un triangle équilatéral de côté a. On note A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

Calculer les produits scalaires suivants :



$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{8}$$

1. $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ $= AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{3} = a^2/2$
2. $\overrightarrow{AA'}\bullet\overrightarrow{AC}$ $= AA' \times AC \times \cos\pi/6 = a\sqrt{3}/2 \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a^2/4$
3. $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AB'}$ $= AB \times AB' \times \cos\frac{\pi}{3} = a \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} = a^2/4$
4. $\overrightarrow{GA}\bullet\overrightarrow{GB}$ $= GA \times GB \times \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -a^2/6$
5. $\overrightarrow{A'A}\bullet\overrightarrow{B'B}$
6. $\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}$

$= AA' \times BB' \times \cos\frac{2\pi}{3} = a\frac{\sqrt{3}}{2} \times a\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3a^2/8$