Chapitre 16 : Intégration

Série 16 - 1

Exemple 1

On note F une primitive de f.

2] $F(x) = 4\dfrac{x^5}{5} - 8\times\dfrac{x^4}{4} + 5\times\dfrac{x^3}{3} - 8x + k$

$F(x) = \dfrac{4}{5}x^5 - 2x^4 + \dfrac{5}{3}x^3 - 8x + k \quad (k \in \mathbb{R})$

4] Sur $]-\infty ; 0[$

$F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2\ln(-x) + k \quad (k \in \mathbb{R})$

Sur $]0 ; +\infty[$

$F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2\ln x + k \quad (k \in \mathbb{R})$

6] $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x) - \sin(3x) + k \quad (k \in \mathbb{R})$

8] Sur $]-\infty ; 0[$ ou sur $]0 ; +\infty[$

On a : $f(x) = x^{-4}$

$F(x) = -\dfrac{1}{3}x^{-3} + k$

$F(x) = -\dfrac{1}{3x^3} + k \quad (k \in \mathbb{R})$

10] Sur $]-\infty ; 0[$ ou sur $]0 ; +\infty[$

On a : $f(x) = -3x^{-2}$

$F(x) = -3\dfrac{x^{-1}}{-1} + k$

$= \dfrac{3}{x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$

12] $F(x) = -2\times\dfrac{1}{3}e^{3x} + k$

$= -\dfrac{2}{3}e^{3x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$

Exemple 2

2) Une primitive F de f s'écrit :

$$F(x) = 5x + \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^5}{5} + k. \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$F(1) = 0 \iff 5 + \frac{1}{4} - \frac{3}{5} + k = 0$$

$$\iff \frac{100+5-12}{20} + k = 0$$

$$\iff k = -\frac{93}{20}$$

La primitive cherchée est définie par :

$$F(x) = 5x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{93}{20}$$

4) Une primitive F de f s'écrit :

$$F(x) = -2 \times \frac{1}{4}\cos(4x) + \sin x + k.$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(4x) + \sin x + k$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \iff -\frac{1}{2}\cos\left(4\frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2} + k = 1$$

$$\iff -\frac{1}{2}\cos(2\pi) + 1 + k = 1$$

$$\iff -\frac{1}{2} \times 1 + 1 + k = 1$$

$$\iff k = +\frac{1}{2}$$

La primitive cherchée est définie par :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(4x) + \sin x + \frac{1}{2}.$$

Exemple 3

2) Le discriminant de $5x^2+5x+12$ est $\Delta = 25 - 4 \times 5 \times 12 < 0$

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{5}\,\frac{10x+5}{5x^2+5x+12} = \frac{1}{5}\,\frac{(5x^2+5x+12)'}{5x^2+5x+12}$$

Une primitive F de f est définie, sachant que $5x^2+5x+12>0$, par

$$F(x) = \frac{1}{5}\ln(5x^2+5x+12) + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

4) $$f(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1} \iff \frac{7x-9}{x^2-2x-3} = \frac{a(x+1)+b(x-3)}{(x+1)(x-3)}$$

$$\iff 7x-9 = ax + a + bx - 3b$$

$\Leftrightarrow 7x-9 = (a+b)x + a - 3b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = a+b \\ -9 = a-3b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3b = 21 \\ a-3b = -9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 12 \\ a+b = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$

Ainsi $f(x) = \dfrac{3}{x-3} + \dfrac{4}{x+1}$

L'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; +\infty[$

Sur $]-\infty; -1[$, on a : $x+1 < 0$ et $x-3 < 0$

Une primitive F de f est définie par :

$F(x) = 3\ln(-x+3) + 4\ln(-x-1) + k \quad (k \in \mathbb{R})$

Sur $]-1; 3[$, on a : $x+1 > 0$ et $x-3 < 0$.

Une primitive F de f est définie par :

$F(x) = 3\ln(-x+3) + 4\ln(x+1) + k \quad (k \in \mathbb{R})$

Sur $]3; +\infty[$, on a : $x+1 > 0$ et $x-3 > 0$.

Une primitive F de f est définie par :

$F(x) = 3\ln(x-3) + 4\ln(x+1) + k \quad (k \in \mathbb{R})$