

Chapitre 16: Intégration

Série 16-2

Exemple 4

$$2) \int_{-1}^1 (t^3 - 3t) dt = \left[\frac{1}{4} t^4 - \frac{3}{2} t^2 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$4) \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \left[\ln(t+1) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$6) \int_0^2 e^{5x} dx = \left[\frac{1}{5} e^{5x} \right]_0^2 = \frac{1}{5} (e^{10} - e^0) = \frac{1}{5} (e^{10} - 1)$$

$$8) \int_1^2 \frac{3x}{x^2+3} dx = \int_1^2 \frac{3}{2} \frac{2x}{x^2+3} dx = \frac{3}{2} \left[\ln(x^2+3) \right]_1^2 \\ = \frac{3}{2} (\ln 7 - \ln 4) = \frac{3}{2} \ln \frac{7}{4}$$

$$10) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x) dx = \left[-\frac{1}{4} \cos 4x \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{4} (\cos 4\pi - \cos(-4\pi)) \\ = -\frac{1}{4} (1 - 1) = 0$$

Exemple 5

$$2) \int_{-1}^2 (x^3 + 4x^2 + 2x + 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3} x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^2 \\ = \left(\frac{2^4}{4} + \frac{4}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 6 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 1 - 3 \right) \\ = 4 + \frac{32}{3} + 4 + 6 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - 1 + 3 = 14 + \frac{36}{3} - \frac{1}{4} + 2 \\ = 14 + 12 + 2 - \frac{1}{4} = 28 - \frac{1}{4} = \frac{112-1}{4} = \frac{111}{4} \text{ u.a.}$$

$$4) \int_2^7 \frac{5}{x+2} dx = \left[5 \ln(x+2) \right]_2^7 = 5 (\ln 9 - \ln 4) = 5 \ln \frac{9}{4} \\ = 5 \ln \left(\frac{3}{2} \right)^2 = 10 \ln \frac{3}{2} \text{ u.a.}$$

$$6) \int_0^4 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^4 = -e^{-4} + e^0 = 1 - e^{-4} \text{ u.a.}$$

Exemple 6

2] La fonction cube est positive sur $[0, 2]$, donc l'aire $\mathcal{A}$ cherchée est égale à : $\mathcal{A} = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - 0 = 4 \text{ u.a.}$

$$\text{Or } 1 \text{ u.a.} = 5 \times 3 = 15 \text{ cm}^2$$

$$\text{donc } \mathcal{A} = 4 \times 15 = 60 \text{ cm}^2.$$

Exemple 7

2] La parabole est au-dessus de la droite pour $x \in [0, 2]$.

L'aire $\mathcal{A}$ cherchée est égale à :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 [(-2x^2 + 6x - 2) - (2x - 2)] dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= -\frac{2}{3} \times 2^3 + 2 \times 2^2 - 0 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Exemple 8

On note F la primitive cherchée.

$$\begin{aligned} 2] \quad F(x) &= \int_1^x (t^4 + t^2 + 5) dt = \left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + 5t \right]_1^x \\ &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 5x - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 5 \right) \\ &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 5x - \frac{83}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4] \quad F(x) &= \int_4^x \left(\frac{1}{x} + 2t \right) dt = \left[\ln t + t^2 \right]_4^x \\ &= (\ln x + x^2) - (\ln 4 + 4^2) = x^2 + \ln x - 2\ln 2 - 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6] \quad F(x) &= \int_0^x (e^{2t} + 3) dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t} + 3t \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + 3x - \left(\frac{1}{2} \times 1 + 0 \right) = \frac{1}{2}e^{2x} + 3x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$