

Chapitre n°16 : Intégration

Série 16-3

Exemple 9

2] Sur $[-3; 0[$, sur $]0; 1[$ et sur $]1; 3[$, la fonction f est un polynôme donc est continue.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ f(0) = 0^2 = 0 \end{array} \right\} \text{ donc la fonction } f \text{ est continue en } 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -x + 2 = -1 + 2 = 1 \\ f(1) = -1 + 2 = 1 \end{array} \right\} \text{ donc la fonction } f \text{ est continue en } 1.$$

Ainsi f est continue sur $[-3, 3]$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_{-3}^0 x dx + \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 (-x + 2) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} \right) + \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + \left(\left(-\frac{3^2}{2} + 2 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) \right) \\ &= 0 - \frac{9}{2} + \frac{1}{3} - 0 - \frac{9}{2} + 6 + \frac{1}{2} - 2 \\ &= -9 + \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{2} = -5 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-30 + 2 + 3}{6} \\ &= -\frac{25}{6} \end{aligned}$$

Exemple 10

2] Sur $[0; 1]$, on a : $t^3 \leq \sqrt{t}$

$$\text{donc } \int_0^1 t^3 dt \leq \int_0^1 \sqrt{t} dt$$

Ainsi $I \leq I$

Exemple 11

2] Pour tout $x \in [0, 1]$, on a: $-1 \leq \cos(x^2) \leq 1$

Ainsi $(-1) \times x^2 \leq x^2 \cos(x^2) \leq 1 \times x^2$ car $x^2 \geq 0$.

$$\text{D'où } -x^2 \leq x^2 \cos(x^2) \leq x^2$$

$$\text{et } \int_0^1 (-x^2) dx \leq I \leq \int_0^1 x^2 dx$$

$$\text{c'est-à-dire } \left[-\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq I \leq \frac{1}{3}$$

Exemple 12

$$2] \quad I = \frac{1}{2 \cdot (-1)} \int_{-1}^2 (x^2 + 2x) dx = \frac{1}{3} \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\frac{9}{3} + 3 \right)$$

$$= 0.$$

Exemple 13

$$2] \quad I = \int_0^2 x e^x dx. \quad \text{On pose } \begin{array}{ll} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{array}$$

$$I = [x e^x]_0^2 - \int_0^2 1 \times e^x dx$$

$$= (2e^2 - 0) - [e^x]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - e^0)$$

$$= e^2 + 1$$

$$4] \quad L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} t \cos t dt \quad \text{On pose } \begin{array}{ll} u = t & v' = \cos t \\ u' = 1 & v = \sin t \end{array}$$

$$L = \left[t \sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t dt = \left(\frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) - [-\cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{6} - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{6\sqrt{3} - 5\pi}{12}$$