TD n° 14 : La fonction logarithme népérien

Exercice 8

- $f_1(x) = x + \ln x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \text{ par somme } \lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \text{ par somme } \lim\limits_{x \to 0^+} f_1(x) = -\infty$$

- $f_2(x) = x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée, donc :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{ par produit } \lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} -\ln x = +\infty \end{array}\right\} \text{ par somme } \lim\limits_{x \to 0^+} f_2(x) = +\infty$$

- $f_3(x) = x \ln x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \text{ par produit } \lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f_3(x) = 0$

- $f_4(x) = \frac{\ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissance comparée} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x + 1 = 1 \end{array}\right\} \text{ par quotient } \lim\limits_{x \to 0^+} f_4(x) = -\infty$$

- $f_5(x) = (x+1)\ln x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \text{par produit } \lim\limits_{x \to +\infty} f_5(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} x+1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \text{par produit } \lim\limits_{x \to 0^+} f_5(x) = -\infty$$

- $f_6(x) = \ln \dfrac{x}{x^2+1} = \ln \dfrac{x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \ln \dfrac{1/x}{1+\frac{1}{x^2}} = \ln \dfrac{1}{x} - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = -\ln x - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1 \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln x = -\infty \end{array}\right\} \text{par somme } \lim\limits_{x \to +\infty} f_6(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2+1} = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \to 0^+} f_6(x) = -\infty$$

Exercice 9

1) a) $h'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$

$2x^2-1$ a deux racines : $x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On obtient les variations suivantes :

x	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$2x^2-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

b) $h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 - \ln\sqrt{2} + \ln 2$

$= \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2.$

Or $\ln 2 > 0$ donc $h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$.

c) D'après les variations de h, h a pour minimum $h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ qui est strictement positif. Donc $h(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

2) a) $f'(x) = 1 + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 + \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$= \dfrac{x^2+1-\ln x}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$

par somme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissance comparée} \end{array}\right\}$ par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) On obtient le tableau de variations suivant :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$\ln(x)$	$+$
x^2	$+$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

d) $M(x, y) \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}) \iff \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ x = x + \dfrac{\ln x}{x} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = x \\ \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ \ln x = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ a pour coordonnées : $(1;1)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée

Ainsi la droite $(\mathcal{D})$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C})$.

f)