TD n° 16 : Intégration

Exercice 2

1) Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x (2t^2+5t-8)\,dt$

$$= \left[\frac{2t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} - 8t\right]_0^x$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 8x$$

2) Sur $]0;+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{2t^3+t^2-5t+1}{t}\,dt$

$$= \int_1^x \left(2t^2+t-5+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \left[\frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 5t + \ln t\right]_1^x$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + \ln x - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 5 + \ln 1\right)$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + \ln x + \frac{23}{6}$$

3) Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x (2\sin t - 5\cos t)\,dt$

$$= \left[-2\cos t - 5\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^x$$

$$= -2\cos x - 5\sin x + 2\cos\frac{\pi}{2} + 5\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= -2\cos x - 5\sin x + 5$$

4) Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^x 6\cos\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)dt$

$$= \left[2\sin\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^x$$

$$= 2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) + 1$$

Exercice 3

1) $g'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Donc g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

2) Soit F la primitive cherchée.

$$F(x) = \int_1^x \ln t\,dt = \left[g(t)\right]_1^x = g(x) - g(1) = x\ln x - x + 1$$

Exercice 5

1) $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+5x-1}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$

$\Leftrightarrow x^2+5x-1 = ax^2+2ax+bx+2b+c$

$\Leftrightarrow x^2+5x-1 = ax^2+(2a+b)x+2b+c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=5 \\ 2b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=3 \\ c=-7 \end{matrix}$

Ainsi $f(x) = x+3-\frac{7}{x+2}$.

Soit F la primitive cherchée sur $]-2;+\infty[$.

$F(x) = \int_1^x \left(t+3-\frac{7}{t+2}\right)dt$

$= \left[\frac{t^2}{2}+3t-7\ln(t+2)\right]_1^x$

$= \frac{x^2}{2}+3x-7\ln(x+2)-\left(\frac{1}{2}+3-7\ln 3\right)$

$= \frac{x^2}{2}+3x-7\ln(x+2)-\frac{7}{2}+7\ln 3$

2) $f(x) = a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c}{(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+4 = a(x^2-2x+1)+bx-b+c$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+4 = ax^2-2ax+a+bx-b+c$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+4 = ax^2+(b-2a)x+a-b+c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-2a=-3 \\ a-b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$ Ainsi $f(x) = 2+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}$

Soit F la primitive cherchée sur $]1;+\infty[$

$F(x) = \int_2^x \left(2+\frac{1}{t-1}+\frac{3}{(t-1)^2}\right)dt+3 = \left[2t+\ln(t-1)-\frac{3}{t-1}\right]_2^x+3$

$= 2x+\ln(x-1)-\frac{3}{x-1}-\left(4+\ln 1-\frac{3}{1}\right)+3$

$= 2x+\ln(x-1)-\frac{3}{x-1}+2$

$= 2x+2-\frac{3}{x-1}+\ln(x-1)$