Chapitre 17 : Produit scalaire

1 Premières définitions

Définition 1 : avec les angles

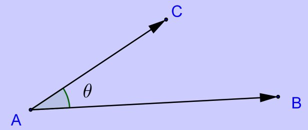
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On appelle le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ défini par

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ alors

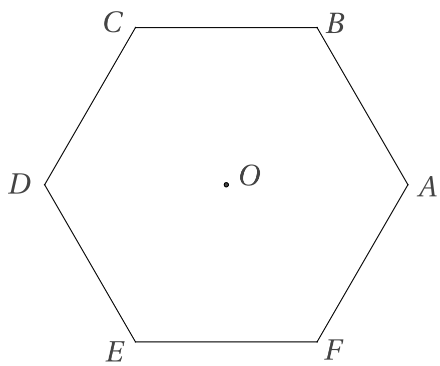
$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$



Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur nul, alors le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ avec tout vecteur $\overrightarrow{v}$ est égal à 0.
Ainsi $\overrightarrow{0} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{0} = 0$.

Remarque
Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel (positif, négatif ou nul).

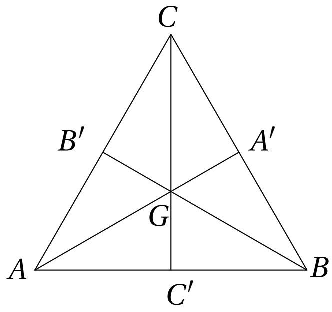
Exemple 1
On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O tel que $AB = 2$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA}$
2. $\overrightarrow{OD} \bullet \overrightarrow{OE}$
3. $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{CB}$
4. $\overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{FE}$
5. $\overrightarrow{EB} \bullet \overrightarrow{FA}$

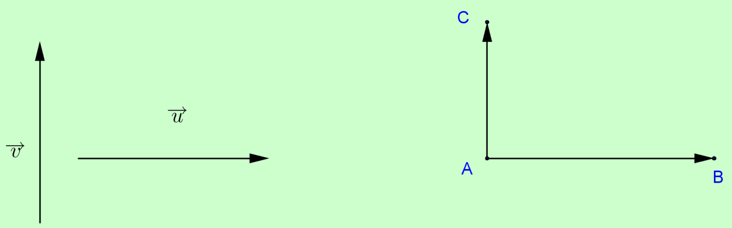
Exemple 2
ABC est un triangle équilatéral de côté a. On note A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ et G le centre de gravité du triangle ABC.
Calculer les produits scalaires suivants :



1. $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AA'} \bullet \overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB'}$
4. $\overrightarrow{GA} \bullet \overrightarrow{GB}$
5. $\overrightarrow{A'A} \bullet \overrightarrow{B'B}$
6. $\overrightarrow{A'B'} \bullet \overrightarrow{A'C'}$

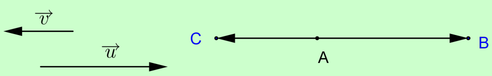
Propriété 1 : vecteurs orthogonaux et colinéaires

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.



Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens, alors leur produit scalaire est égal : $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$.

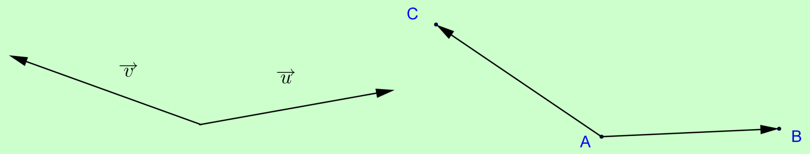
Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors leur produit scalaire est égal : $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = -\| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$.



Propriété 2 : angle aigu, angle obtus

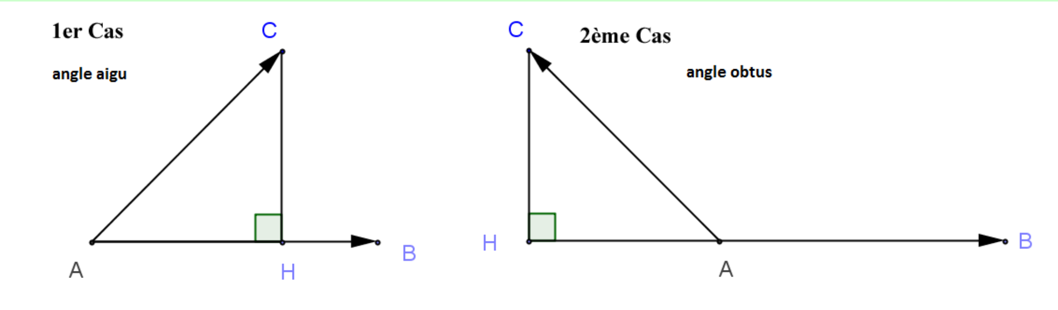
$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} \geqslant 0$ si et seulement si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} \leqslant 0$ si et seulement si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.



Propriété 3 : produit scalaire et projections

Si $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB), alors :
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH}$.



$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH} = AB \times AH$

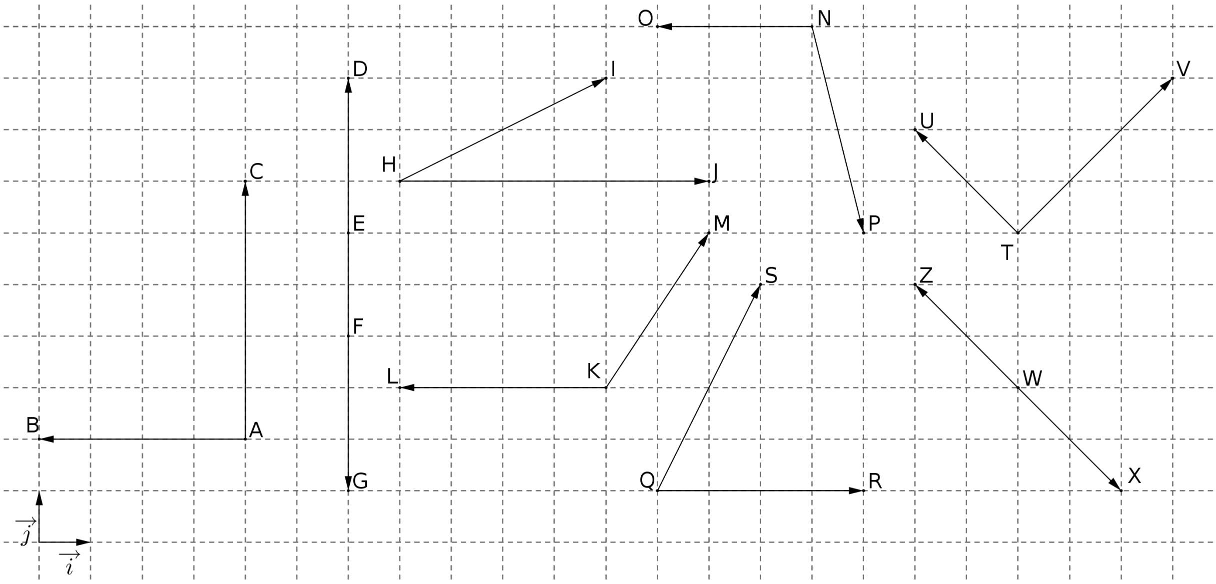
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$

Exemple 3
Reprendre l'exemple 2 mais en calculant les produits scalaires avec cette propriété des projetés.

Propriété 4 : produit scalaire et coordonnées

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') alors $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Exemple 4
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée.
A l'aide du graphique ci-dessous, calculer chaque produit scalaire de deux manières sauf pour les questions m) et n) où une seule manière est possible :



a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} =$

b) $\overrightarrow{ED} \bullet \overrightarrow{EF} =$

c) $\overrightarrow{ED} \bullet \overrightarrow{EG} =$

d) $\overrightarrow{HI} \bullet \overrightarrow{EG} =$

e) $\overrightarrow{HJ} \bullet \overrightarrow{HI} =$

f) $\overrightarrow{LK} \bullet \overrightarrow{KM} =$

g) $\overrightarrow{NO} \bullet \overrightarrow{QS} =$

h) $\overrightarrow{TU} \bullet \overrightarrow{QR} =$

i) $\overrightarrow{ZW} \bullet \overrightarrow{TV} =$

j) $\overrightarrow{ZW} \bullet \overrightarrow{WX} =$

k) $\overrightarrow{VT} \bullet \overrightarrow{NO} =$

l) $\overrightarrow{ON} \bullet \overrightarrow{PN} =$

m) $\overrightarrow{NP} \bullet \overrightarrow{KM} =$

n) $\overrightarrow{WZ} \bullet \overrightarrow{QS} =$

o) $\overrightarrow{SQ} \bullet \overrightarrow{QR} =$

Application fondamentale du produit scalaire : cosinus et sinus d'une somme

Propriété 5 : formules d'addition

Soient a et b deux réels. On a :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Remarque
Il faut savoir retrouver rapidement ces formules (voir démonstration faite en cours)

Définition 2 : carré scalaire d'un vecteur

On appelle carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ le nombre $\vec{u} \bullet \vec{u}$, noté $\vec{u}^{\,2}$.

Propriété 6 : carré scalaire et norme

Soit $\vec{u}$ un vecteur tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
Alors $\vec{u}^{\,2} = \vec{u} \bullet \vec{u} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{u} \| = \| \vec{u} \|^2$ et $AB^2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$.

Remarque
Cette dernière propriété permet de passer d'une écriture de distances à une écriture vectorielle.

2 Propriétés du produit scalaire

Propriété 7 : propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k :

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

$\vec{u} \bullet (k\vec{v}) = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$

$(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$

$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

$(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$.

Exemple 5
Démontrer que pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$

Propriété 8 : identités remarquables

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \bullet (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$
$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

Propriété 9 : vecteurs orthogonaux et produit scalaire

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
Autrement dit $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$

Exemple 6
Déterminer le réel m tel que $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$ dans chacun des cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}(1;3)$ et $\overrightarrow{v}(2;m)$
2. $\overrightarrow{u}(m;1)$ et $\overrightarrow{v}(m;-1)$
3. $\overrightarrow{u}(2m+1;1)$ et $\overrightarrow{v}(m+1;-3)$

Propriété 10 : théorème de la médiane

Soit MAB un triangle et I le milieu de $[AB]$. Alors :

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Remarque
Ces formules ne sont pas à connaître par cœur. En revanche, on doit savoir les retrouver en utilisant des carrés scalaires et le milieu I de $[AB]$.

3 Applications du produit scalaire dans le plan

Propriété 11 : formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$

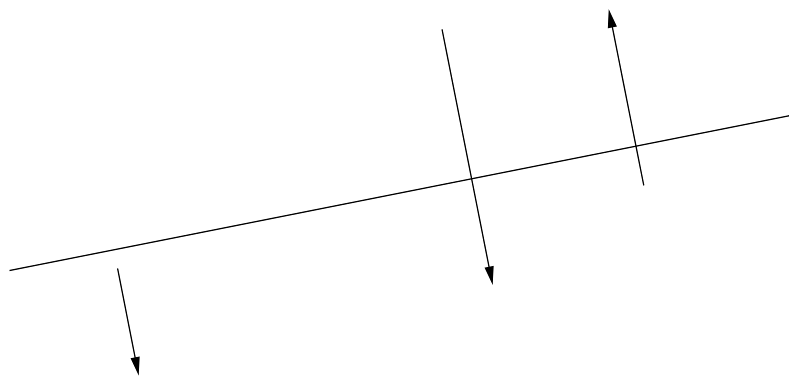
Remarque
La formule d'Al-Kashi est aussi appelée formule de Pythagore généralisée. En effet, si le triangle ABC est rectangle en C, on obtient :

Exemple 7

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $BC = 4$.
   Déterminer des valeurs approchées en degré à 10^{-1} près des angles de ce triangle.
2. Même question avec $AB = 4$, $AC = 7$ et $BC = 5$.

Définition 3 : vecteur normal à une droite

Un vecteur normal à une droite $(\mathscr{D})$ est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.



Propriété 12 : équations de droite

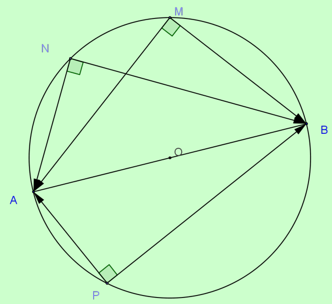
Soit A un point du plan et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de coordonnées (a,b).
La droite $(\mathscr{D})$ qui passe par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ a une équation du type $ax+by+c=0$ où c un réel qui dépend des coordonnées de A.
Réciproquement, la droite d'équation $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ a pour vecteur normal le vecteur de coordonnées (a,b).
Elle a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(-b;a)$.

Exemple 8

1. Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D})$ passant par $A(1,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(\sqrt{2},4)$.
2. Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D})$ passant par $B(-2,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\left(\frac{1}{2},-3\right)$.
3. Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y=2x+3$. Déterminer un vecteur normal de $(\mathscr{D})$.
4. Déterminer une équation de la droite $(\mathscr{D})$ passant par $A(1,-2)$ et perpendiculaire à la droite $(\mathscr{D}')$ d'équation $-x+y-2=0$.

Propriété 13 : caractérisation du cercle

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=0$.

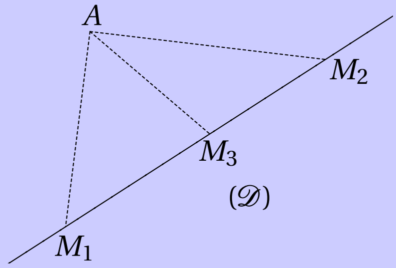


Exemple 9

1. Déterminer, de deux manières, une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où A est de coordonnées $(4,-1)$ et B de coordonnées $(-3,2)$.
2. Même question avec le cercle de diamètre $[CD]$ où C est de coordonnées $(-2,3)$ et D de coordonnées $(4,-2)$.

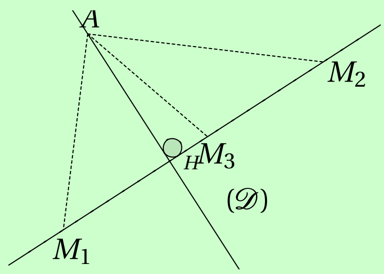
Définition 4 : distance d'un point à une droite

La distance d'un point à une droite est la plus courte distance séparant ce point et un point courant de la droite.



Propriété 14 : distance d'un point à une droite

La distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$ correspond à la distance entre le pont A et son projeté orthogonal H sur la droite $(\mathscr{D})$



Notation
Cette distance se note $d(A,(\mathscr{D}))$ et donc $d(A,(\mathscr{D})) = AH$

Propriété 15 : distance d'un point à une droite

Si la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation $ax + by + c = 0$ et si le point A a pour coordonnées (x_A, y_A), alors la distance entre A et la droite $(\mathscr{D})$ est donnée par :

$$d(A,(\mathscr{D})) = AH = \frac{|\, ax_A + by_A + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple 10
Soient les points $A(2,3), B(-2,1)$ et $C(4,5)$.

1. Déterminer la distance du point A à la droite (BC).
2. Déterminer la distance du point B à la droite (CA).