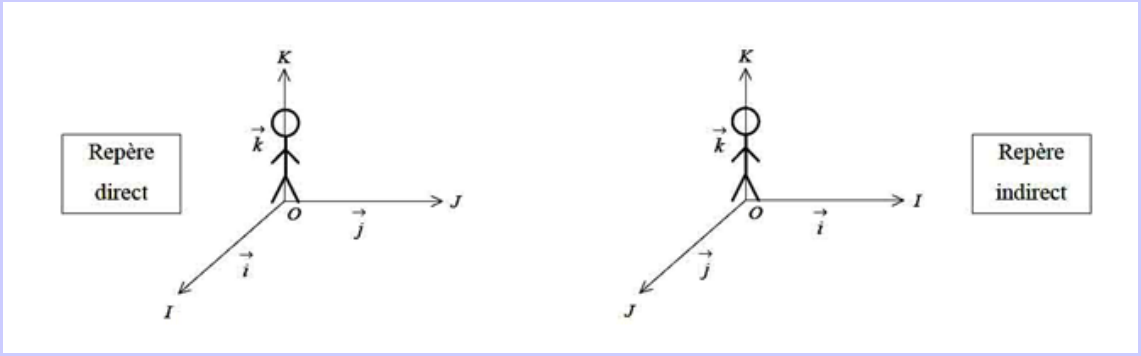
Chapitre 18 : Géométrie dans l'espace

1 Le produit vectoriel

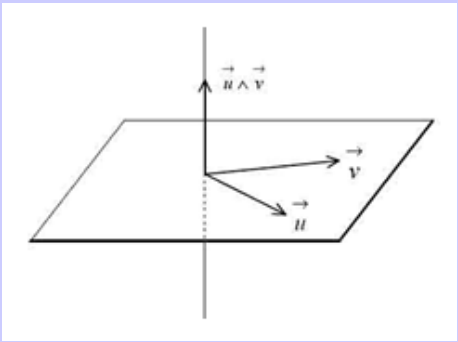
Définition 1 : repère direct de l'espace

Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $(O, \vec{k})$, les pieds en O et regardant le point I.
Un repère est dit "direct" si, l'observateur a le point J à sa gauche. Il est dit "indirect" dans le cas contraire.



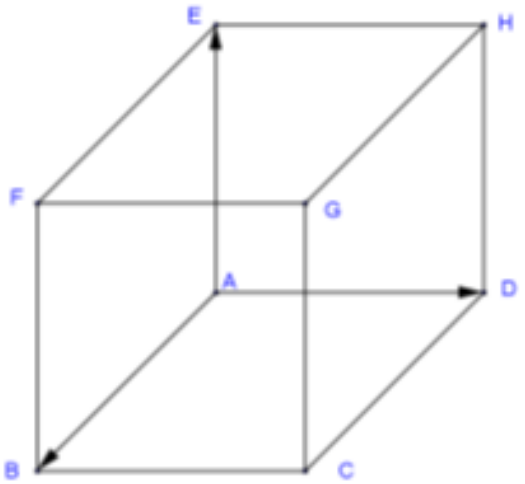
Définition 2 : produit vectoriel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :
– lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
– lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,
$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$



Remarques
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe.
• Réciproquement, si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

Exemple 1
Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ ci-contre construit à partir d'un cube est orthonormal direct.



Déterminer les vecteurs :
a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AG}$

Propriété 1 : colinéarité et alignement

Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Propriété 2 : aire d'un parallélogramme

L'aire du parallélogramme formé sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ est égale à $\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|$.

Propriété 3 : propriétés du produit vectoriel

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel k :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$
$$(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$$
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

Propriété 4 : produit vectoriel et base orthonormée directe

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe.
On a :
$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$
$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$
$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$
$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

Exemple 2
On considère l'espace muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormale directe.
Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

1. $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{k}$
2. $\vec{u} = -3\vec{i} - 2\vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$
3. $\vec{u} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
4. $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Propriété 5 : produit vectoriel et coordonnées

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z'), alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$.

Remarque
Pour calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, il est commode de présenter ainsi :

Exemple 3
On considère l'espace muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ direct et les points
$A(-3\,;\,1\,;1)$, $B(1\,;\,3\,;-2)$, $C(-4\,;\,-1\,;\,3)$, $D(3\,;\,2\,;\,2)$, $E(-2\,;\,5\,;\,0)$ et $F(0\,;\,4\,;\,1)$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs :
a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{FB} \wedge \overrightarrow{BD}$

2 Produit scalaire dans l'espace et applications

Remarque
On définit le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace exactement de la même manière que dans le plan.
Seule l'expression avec les coordonnées dans l'espace change :

$$\text{Si } \vec{u}\,(x,y,z) \text{ et } \vec{v}\,(x',y',z') \text{ alors } \vec{u}\bullet\vec{v} = xx'+yy'+zz'.$$

Exemple 4

1. Soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives dans une base orthonormée directe :
$$\vec{u}\left(-\frac{4}{9}\,;\,\frac{1}{9}\,;\,\frac{8}{9}\right),\ \vec{v}\left(\frac{4}{9}\,;\,\frac{8}{9}\,;\,\frac{1}{9}\right),\ \vec{w}\left(\frac{7}{9}\,;\,-\frac{4}{9}\,;\,\frac{4}{9}\right).$$
Montrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormale.
Est-elle directe ?
2. Même question avec les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives dans une base orthonormée directe :
$$\vec{u}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\,\frac{1}{2}\right),\ \vec{v}\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\,\frac{1}{2}\right),\ \vec{w}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\,0\,;\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Définition 3 : vecteur normal à un plan

Un vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.

Définition 4 : plan orthogonal à un vecteur

Un plan est dit orthogonal à un vecteur si ce vecteur est un vecteur normal du plan.

Remarque
- Un vecteur normal est un vecteur non nul
- Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal d'un plan $(\mathscr{P})$ est aussi un vecteur normal de ce plan.
- Un vecteur normal au plan (ABC) est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est vecteur normal du plan (ABC).

Exemple 5
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) dans chacun des cas suivants :

1. $A(1,1,3), B(3,-1,4)$ et $C(-2,3,1)$
2. $A(4,0,-1), B(2,1,-4)$ et $C(1,-2,1)$

Propriété 6 : plan orthogonal et produit scalaire

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.
Le plan $(\mathscr{P})$ passant par A et orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} = 0$.

Propriété 7 : équations de plan

Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
Réciproquement, si a, b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$.

Exemple 6

1. Déterminer une équation du plan orthogonal à (AB) passant par C où on donne $A(2\,;\,3\,;\,1), B(-3\,;\,1\,;\,0)$ et $C(4\,;\,-1\,;\,2)$.
2. Même question avec $A(-2\,;\,1;\,-2), B(-3\,;\,1\,;4)$ et $C(4\,,\,0\,;\,-1)$.
3. Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne $A(0\,;\,1\,;\,-1), B(2\,;\,1\,;\,-2)$ et $C(1\,;\,0\,;\,-2)$. Déterminer une équation du plan (ABC).
4. Même question avec $A(2\,;\,3\,;\,2), B(5\,;\,3\,;\,-1)$ et $C(1\,;\,2\,;\,-2)$.

Définition 5 : distance d'un point à un plan

La distance d'un point A à un plan $(\mathscr{P})$ est AH où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.

Propriété 8 : distance d'un point à un plan

La distance d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ au plan $(\mathscr{P})$ d'équation $ax+by+cz+d=0$ est :

$$AH = \frac{|\, ax_A + by_A + cz_A + d \,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Remarque
Au lieu d'utiliser cette formule, on peut aussi chercher les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur le plan, puis calculer la distance AH.

Exemple 7
Soit A, B, C et D quatre points de l'espace, dont les coordonnées dans un repère orthonormal sont respectivement $A(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$ et $D(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

1. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. En déduire la distance du point D au plan (ABC).
4. Retrouver cette distance à l'aide de la formule donnant la distance d'un point à un plan.

Propriété 9 : équations de sphères

La sphère $(\mathscr{S})$ de centre $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R admet une équation de la forme :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

Propriété 10 : caractérisation de la sphère

La sphère $(\mathscr{S})$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$.

Exemple 8

1. Soient $A(2\,;\,-1\,;\,0)$ et $B(-2\,;\,4\,;\,3)$.
   - **a.** Déterminer une équation de la sphère $(\mathscr{S}_1)$ de centre A et de rayon 3.
   - **b.** Déterminer une équation de la sphère $(\mathscr{S}_2)$ de centre A et passant par B.
   - **c.** Déterminer une équation de la sphère $(\mathscr{S}_3$ de diamètre $[AB]$.
2. Mêmes questions avec $A(0\,;\,1\,;\,2)$ et $B(-1\,;\,0\,;\,1)$.

3 Droites et systèmes de représentation paramétrique

Propriété 11 : équations paramétriques de droite

La droite $(\mathscr{D})$ passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Le système $\begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique de la droite (t est le paramètre).

Remarque

On retrouve très facilement ce système en écrivant que M appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Exemple 9

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(2\,;\,7\,;\,-3)$ et $B(4\,;\,-1\,;\,3)$.
2. Même question avec $A(3\,;\,-2\,;\,5)$ et $B(7\,;\,-1\,;\,-8)$.
3. Soit $(\mathscr{D})$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 4+3t \\ y &= -2+t \\ z &= 1-5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   - **a.** Les points $A(-2\,;\,-4\,;\,13)$ et $B(7\,;\,-1\,;\,-4)$ appartiennent-ils à $(\mathscr{D})$?
   - **b.** La droite $(\mathscr{D})$ est-elle parallèle à la droite (AC) où $C(-8,-6,23)$?
   - **c.** La droite $(\mathscr{D})$ est-elle orthogonale à la droite (BD) où $D(9,2,-2)$?
   - **d.** Déterminer l'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ avec le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $2x-3y+z=4$.

Propriété 12 : système d'équations de droite

Une droite est l'intersection de deux plans donc lorsque (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas proportionnels l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que

$$\begin{cases} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases}$$

est une droite.

Remarque
Le système d'équations n'est pas unique. Une droite peut être définie de plusieurs façons comme l'intersection de deux plans.

Exemple 10
Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ les plans d'équations respectives $x+y+z-2=0$ et $x-2y-z+1=0$.

1. Justifier que l'intersection de $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ est une droite. On la note $(\mathscr{D})$.
2. Donner un système de représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$.
3. En déduire un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$. Proposer une autre méthode pour trouver un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.

4 Exercice de synthèse

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :

$$A(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)\ ,\ B(1\ ;\ -6\ ;\ -1) \text{ et } C(2\ ;\ 2\ ;\ 2).$$

1. **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation : $x-y+z-4=0$.
   a. Montrer que les plans (ABC) et $(\mathscr{P})$ sont sécants.
   b. Soit $(\mathscr{D})$ la droite intersection des plans $(\mathscr{P})$ et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$.
3. On considère la sphère $(\mathscr{S})$ de centre $\Omega(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$.
   a. Montrer que le point I appartient à la droite $(\mathscr{D})$.
   b. Montrer que le point I appartient à la sphère $(\mathscr{S})$.
   c. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ coupe la sphère $(\mathscr{S})$ en un deuxième point.