# Chapitre 9. Equations horaires du mouvement

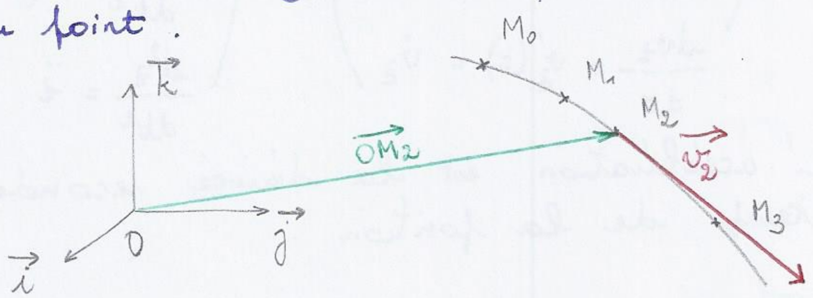
## I. Vecteurs vitesse et accélération

### 1) Vecteur vitesse.

Dans un référentiel donné, le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point mobile est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

où O est l'origine du référentiel et M la position du point.




**Coordonnées du vecteur vitesse :**

Si $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

alors $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = y'(t) = \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = z'(t) = \dot{z} \end{pmatrix}$

soit $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$.

application 1

2) Vecteur accélération

Dans un référentiel donné, le vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point mobile est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{v}$ de ce point :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

L'accélération s'exprime en $m.s^{-2}$.

Coordonnées du vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

$$\vec{a}\begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} = v_x'(t) = \dot{v}_x \\ \frac{dv_y}{dt} = v_y'(t) = \dot{v}_y \\ \frac{dv_z}{dt} = v_z'(t) = \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{pmatrix}$$

applications 2+3

L'accélération est la dérivée seconde par rapport au temps de la position.

ex. 8+13+20+18 p 214 (Tale S)

## II/ Deuxième loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de sa masse par l'accélération de son centre d'inertie :

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}}$$

$\Sigma F_{ext}$ en N
m en kg
a en $m.s^{-2}$

Remarque. Dans le cas particulier où $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ on retrouve $\vec{a} = \vec{0}$ donc $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{V_0}$, vecteur constant, c'est-à-dire un mouvement rectiligne uniforme ou immobile.

application 4

ex. 16+17+12 p 214

## III/ Equations horaires d'un mouvement de chute verticale libre

Rappel Un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids.

On étudie la chute libre d'un solide de masse $m$ dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen :

D'après la deuxième loi de Newton :

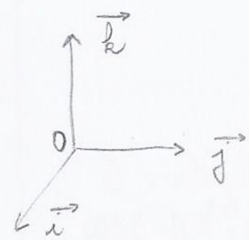
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \qquad \text{donc} \quad \vec{a} = \vec{g}$$

En chute libre, le vecteur accélération est égal au vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$.

Dans le repère d'étude $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ :

$$\vec{a}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = -g\vec{k}$$



$$\vec{v}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -gt + C_3 \end{pmatrix}$$

Cas d'un solide lâché sans vitesse initiale

$$\vec{v}(t=0) = \vec{0} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -0 + C_3 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \quad \begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \quad \vec{v}(t) = -gt\,\vec{k}$$

$$\vec{OM}\begin{pmatrix} C_4 \\ C_5 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + C_6 \end{pmatrix}$$

Soit les coordonnées initiales $\vec{OM}(t=0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

alors $C_4 = x_0$

$C_5 = y_0$

$C_6 = z_0$

et $\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 \end{pmatrix}$ $\quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$

Cas d'un solide lâché avec une vitesse initiale

$\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{k} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -gt + C_3 \end{pmatrix}$

$\vec{v}(t) = (-gt + v_0)\vec{k}$

et $\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 \end{pmatrix}$ $\quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$

application 5
ex. 8 (6t) p 232

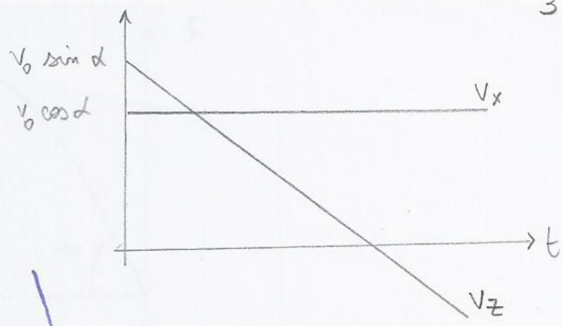
## IV Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur

On étudie la chute libre d'un projectile lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}$ quelconque :


$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ $\quad \vec{V} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -gt + C_3 \end{pmatrix}$

et $\vec{V}(t=0) = \vec{V_0} = \begin{pmatrix} V_0 \cos\alpha \\ 0 \\ V_0 \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

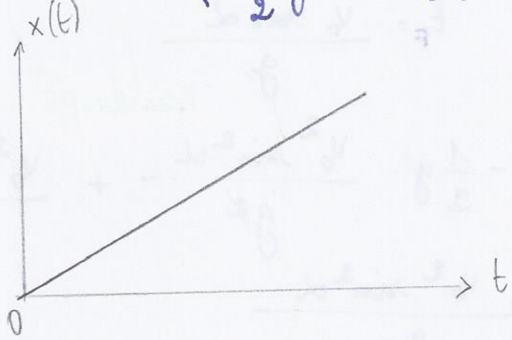
donc $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$

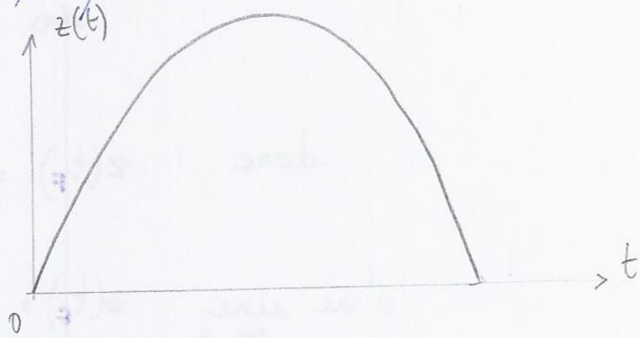



$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_0 (\cos\alpha) t + C_4 \\ C_5 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 (\sin\alpha) t + C_6 \end{pmatrix}$

On choisit l'origine du repère comme étant la position du projectile à $t = 0$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0}$

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_0 (\cos\alpha) t \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 (\sin\alpha) t \end{pmatrix}$




Equation de la trajectoire

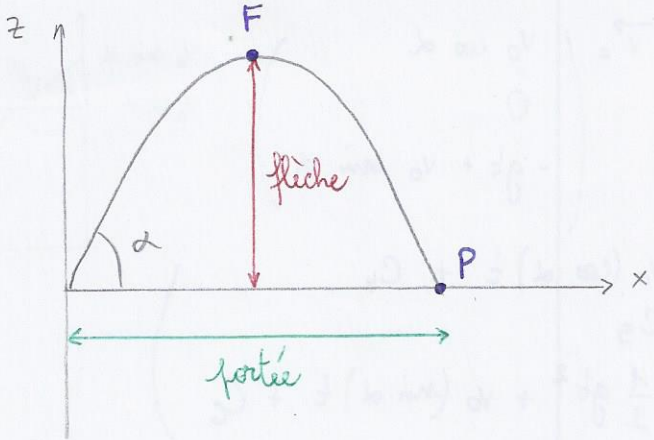
Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il s'agit d'exprimer $z$ en fonction de $x$, en éliminant le temps $t$.

$x(t) = v_0 (\cos\alpha) t$ donc $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$z = -\frac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \dfrac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} \cdot x$

$z = -\dfrac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha) \cdot x$

La trajectoire est une parabole, située dans le plan contenant $\vec{v_0}$.




La flèche de la trajectoire est l'altitude maximale atteinte par le projectile (point F).

En ce point, la vitesse est horizontale donc $v_z(t) = 0$.

$$v_z(t_F) = 0 \iff -g t_F + v_0 \sin \alpha = 0$$
$$\iff t_F = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

donc $$z(t_F) = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

d'où une flèche $$z(t_F) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

La portée est la distance entre le point de lancement O et le point d'impact P sur le plan horizontal contenant O.

En ce point, $z(t_P) = 0 \iff t_P = \dfrac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$

donc $$x(t_P) = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

d'où la portée $$x(t_P) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Remarque. La flèche et la portée dépendent des conditions initiales.

La portée est maximale pour $\alpha = 45°$.

Application 7
ex. 6 + 11 + 15
p 252