Chapitre 2 : Déterminants

Dans tout le chapitre E désigne un espace vectoriel sur **K** qui est soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

1 Déterminant d'une matrice carrée

Exemples d'introduction

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. Le système $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x+5y & = & 0 \\ -2x+y & = & 0 \end{array} \right.$ a-t-il une unique solution ?
3. A quelles conditions le système $\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by & = & 0 \\ a'x+b'y & = & 0 \end{array} \right.$ a-t-il une unique solution ?
4. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
5. Même question avec $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 1 : déterminant d'une matrice carrée

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée déterminant et notée det telle que :
- le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;
- l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ;
- le déterminant de la matrice identité I_n est égale à 1.

Notation

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c" \\ a" & b" & c" \end{pmatrix}$, on note $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c" \\ a" & b" & c" \end{vmatrix}$

Propriété 1 : déterminant nul

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Propriété 2 : déterminant et produit par un scalaire

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.
Alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Propriété 3 : déterminant d'une combinaison linéaire

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des n vecteurs colonnes $C_1, C_,..C_n$.
Alors pour tout λ réel :

$$\det(C_1, C_2, ...C_{i-1}, C_i + \lambda C_j, C_{i+1}, ..., C_n) = \det(C_1, C_2, ..., C_n).$$

Autrement dit, ajouter à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) ne change pas le déterminant.

Exemples 1

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Propriété 4 : déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.

Propriété 5 : déterminant et matrice inversible

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Propriété 6 : déterminant et opérations

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $\det(AB)$=$\det(A) \times \det(B)$.
2. Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
3. $\det({}^tA) = \det(A)$.

Propriété 7 : développement du déterminant

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Si on fixe un indice i de ligne, alors on a :

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \mathrm{Det} A_{ij}$$

où A_{ij} est la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.
On dit alors que l'on a développé par rapport à la $i^{\text{ième}}$ ligne.

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \mathrm{Det} A_{ij}$$

On dit alors que l'on a développé par rapport à la $j^{\text{ième}}$ ligne.

Remarques

— Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = ad - bc$.

— Si A est une matrice 3×3, on peut calculer le déterminant grâce à la règle dite de Sarrus :

$$\begin{pmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{pmatrix} =$$

Exemples 2

Calculer les déterminants suivants :

1. $a = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

2. $b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

3. $c = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \\ 11 & 0 & 17 \end{vmatrix}$

4. $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

5. $e = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6. $f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

7. $g = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

8. $h = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

9. $i = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$

2 Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

Définition 2 : déterminant d'une famille de veceurs

On appelle déterminant d'une famille de n vecteurs de E espace vectoriel de dimension n dans une base $\mathscr{B}$ donnée le déterminant de la matrice formée des n vecteurs colonnes.

Exemples 3 <u>**KHOLLE**</u>

Calculer le déterminant de chaque famille ci-dessous :

1. $u = (-1, 2, 6)$, $v = (3, -5, 0)$ et $w = (-2, 2, 7)$.
2. $u = (1, 1, 2, 3)$, $v = (0, 1, 0, 4)$, $w = (0, 0, 4, 2)$ et $t = (1, 0, 0, 1)$.

Propriété 8 : déterminant et changement de base

— Le déterminant de n vecteurs dans E de dimension n ne dépend pas de la base choisie.
— La famille de n vecteurs est une base si et seulement si son déterminant est non nul.

Exemples 4 <u>**KHOLLE**</u>

1. Montrer que la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$.
2. Même question avec $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.
3. Même question avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, -1)$ et $v_3 = (-1, 1, -1)$.
4. La famille de polynômes P_1, P_2, P_3 est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$ où $P_1 = X^2 + 1, P_2 = X^2 + 2X + 2$ et $P_3 = 3X + 4$?

Définition 3 : déterminant d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E.
On appelle déterminant de u et on le note $\det(u)$ le nombre

$$\det(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

où $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base quelconque de E.

Remarque

Cette définition est bien correcte puisque le déterminant de n vecteurs ne dépend pas de la base choisie. .

Exemples 5

Dans chacun des cas, déterminer le déterminant de l'endomorphisme f

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = (2x - 3y, 4x - 2y)$
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = (2x - y + 3z, x + y + 2z, 4x - 5y + z)$
3. $E = \mathbb{R}_1[X]$ et $f(aX + b) = (b - a) + 3bX$
4. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f(aX^2 + bX + c) = 2aX + b$

Propriété 9 : déterminant et composition

Soient u et v deux endomorphismes de E.

— $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$.

— Si $\det(u) \neq 0$, alors u est inversible(ou est bijectif) et $\det u^{-1} = \dfrac{1}{\det u}$.