

Chapitre 2 : Exemples corrigés

Exemples 1

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exemple 1

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 22 \end{vmatrix} \quad C_2 \longleftrightarrow C_2 + 5C_1$
 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 22 \end{vmatrix} \quad C_1 \longleftrightarrow C_1 - \frac{11}{2}C_2$
 $\det(A) = 22$

2. $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \quad C_2 \longleftrightarrow C_2 - 3C_1$
 $\det(B) = 5$

3. $\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & -10 \end{vmatrix} \quad C_3 \longleftrightarrow C_3 - 2C_1$
 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & -34 \end{vmatrix} \quad C_3 \longleftrightarrow C_3 - 4C_2$
 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -34 \end{vmatrix} \quad L_3 \longleftrightarrow L_3 - 5L_1$
 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -34 \end{vmatrix} \quad L_3 \longleftrightarrow L_3 - 6L_2$
 $\det(C) = -34$

4. $\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} \quad C_3 \longleftrightarrow C_2 - 2C_1 \text{ et } C_3 \longleftrightarrow C_3 - 3C_1$
 $= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -3 \\ 7 & -6 & -6 \end{vmatrix}$
 $\det(D) = 0$

Exemples 2

Calculer les déterminants suivants :

$$1. a = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$2. b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$3. c = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \\ 11 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$

$$4. d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$5. e = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6. f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$7. g = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$8. h = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$9. i = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$$

Corrigé de l'exemple 2

$$1. a = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} (C_2 \longleftrightarrow C_2 - C_1) = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$$2. b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

$$3. c = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \\ 11 & 0 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 11 & 0 & 17 \\ 11 & 0 & 17 \end{vmatrix} (L_2 \longleftrightarrow L_2 + L_1) = 0$$

$$4. d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} (C_1 \longleftrightarrow C_1 + C_2 + C_3)$$

$$\begin{aligned}
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} (L_2 \longleftrightarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \longleftrightarrow L_3 - L_1) \\
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c) [(a-b)(a-c) + (b-c)^2] \\
&= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad e &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la deuxième ligne}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} (C_3 \longleftrightarrow C_3 - C_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad f &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} (L_3 \longleftrightarrow L_3 - L_2) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la quatrième colonne}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} (C_2 \longleftrightarrow C_2 - 2C_1 \text{ et } C_3 \longleftrightarrow C_3 - C_1) \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad g &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & -13 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} (L_1 \longleftrightarrow L_1 + 2L_2 \text{ et } L_4 \longleftrightarrow L_4 + L_2) \\
&= \begin{vmatrix} 8 & -13 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la première colonne}) \\
&= \begin{vmatrix} 8 & -13 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -23 & 40 & 0 \end{vmatrix} (L_3 \longleftrightarrow L_3 - 3L_1) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -23 & 40 \end{vmatrix} = 235
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad h &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & -2a & 0 & 3 \\ b & a & -3b & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} (C_3 \longleftrightarrow C_3 - 3C_1) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 3 \\ a & -3b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 3 \\ a & -3b & -2a & 0 \\ b & 0 & -3b & a \end{vmatrix} (C_3 \longleftrightarrow C_3 - 3C_1) \\
&= \begin{vmatrix} -2a & 0 & 3 \\ -3b & -2a & 0 \\ 0 & -3b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3b & -2a & 0 \\ 2/3a^2 & -3b & a \end{vmatrix} \left(C_1 \longleftrightarrow C_1 + \frac{2}{3}aC_3 \right) \\
&= 3 \begin{vmatrix} -3b & -2a \\ 2/3a^2 & -3b \end{vmatrix} = 4a^3 + 27b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad i &= \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} (L_2 \longleftrightarrow L_2 - L_1) \\
&= (x+1) \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} x+2 & x+1 & 2x+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3x+5 & 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix} (C_2 \longleftrightarrow C_2 - C_1 \text{ et } C_3 \longleftrightarrow C_3 - C_1) \\
&= -(x+1) \begin{vmatrix} x+1 & 2x+2 \\ 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix} = -(x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix} \\
&= -(x+1)^2 (3x+6) = -3(x+1)^2 (x+2)
\end{aligned}$$

Exemples 3

Calculer le déterminant de chaque famille ci-dessous :

1. $u = (-1, 2, 6)$, $v = (3, -5, 0)$ et $w = (-2, 2, 7)$.
2. $u = (1, 1, 2, 3)$, $v = (0, 1, 0, 4)$, $w = (0, 0, 4, 2)$ et $t = (1, 0, 0, 1)$.

Corrigé de l'exemple 3

1. On montre facilement que $\det(u, v, w) = -31$
2. De même, $\det(u, v, w, t) = 12$

Exemples 4

1. Montrer que la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$.
2. Même question avec $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.
3. Même question avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, -1)$ et $v_3 = (-1, 1, -1)$.
4. La famille de polynômes P_1, P_2, P_3 est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$ où $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + 2X + 2$ et $P_3 = 3X + 4$?

Corrigé de l'exemple 4

1. On montre facilement que $\det(u, v, w) = -3 \neq 0$ donc la famille (u, v, w) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. idem avec $\det(u, v, w) = 2 \neq 0$
3. idem avec $\det(u, v, w) = 8 \neq 0$
4. On calcule le déterminant de la matrice A dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Ainsi, la famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, espace vectoriel de dimension 3 : c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exemples 5

Dans chacun des cas, déterminer le déterminant de l'endomorphisme f

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = (2x - 3y, 4x - 2y)$
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = (2x - y + 3z, x + y + 2z, 4x - 5y + z)$
3. $E = \mathbb{R}_1[X]$ et $f(aX + b) = (b - a) + 3bX$
4. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f(aX^2 + bX + c) = 2aX + b$

Corrigé de l'exemple 5

1. On écrit la matrice A de f dans la base canonique : on a $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $\det(f) = \det(A) = 8$
2. De même, $\det(f) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -12$
3. On écrit la matrice A de f dans la base canonique $(1, X)$:
On a $f(1) = 1 + 3X$ et $f(X) = -1$ donc $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $\det(f) = \det(A) = 3$
4. De même, on a $f(1) = 0$, $f(X) = 1$ et $f(X^2) = 2X$.
On a donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(f) = \det(A) = 0$