Devoir à la maison n°1

Groupe CCINP	Exercices 1,2
Groupe Centrale	Exercices 1,3

Exercice 1

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients complexes.
On dit qu'une matrice K est une matrice scalaire s'il existe un nombre complexe k telle que $K = kI_n$ où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On dit qu'une matrice A a la propriété de Dirac si A^2 est une matrice scalaire.
On note $\mathrm{tr}(M)$ la trace de la matrice M, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
On note $\det(M)$ le déterminant de la matrice M.

Partie I

Dans cette partie, on considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ M^2 - \mathrm{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$.
2. Montrer que si la matrice A a sa trace nulle alors la matrice A possède la propriété de Dirac.
3. Montrer qu'une matrice A qui a la propriété de Dirac est une matrice dont la trace est nulle ou une matrice scalaire.
4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont la trace est nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et préciser la dimension de $\mathcal{D}_2$.
5. Soit les matrices : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Montrer que $\{J, K, L\}$ est une base de $\mathcal{D}_2$.
   - **b.** Soit $A = xJ + yK + zL$. Calculer A^2 en fonction de x, y, z et I_2.

Partie II

Dans cette partie, on considère les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est une matrice qui vérifie la propriété de Dirac telle que A^2 soit non nulle alors :
   - **a.** A est inversible.
   - **b.** A^{-1} vérifie aussi la propriété de Dirac.
2. Montrer que si A, B et $A + B$ vérifient la propriété de Dirac alors la matrice $AB + BA$ est scalaire.

Partie III

Dans cette partie, on considère les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, et plus particulièrement les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$A = 3M + 2N + 2P$.

1. Calculer M^2, N^2 et P^2. Montrer que $MN + NM + MP + PM + NP + PN = 0$.

2. Soit $\mathscr{D}_{\triangle}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ engendré par M, N et P. Montrer que toutes les matrices de $\mathscr{D}_{\triangle}$ ont la propriété de Dirac, et en déduire A^2.

Exercice 2

Etablir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{4n-3}{n\left(n^2-4\right)}$, en calculant la limite de la suite des sommes partielles.

Exercice 3

Etablir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}$, en calculant la limite de la suite des sommes partielles.

On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, la relation :

$$\mathrm{Arctan}\alpha - \mathrm{Arctan}\beta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right).$$

avec α et β bien choisis...