TD Chapitre 2 : Déterminants - CORRECTION

Exercice 1

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -6 & -8 \end{vmatrix} (L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1).$

$\Delta_1 = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = -28$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ (en échangeant les deux premières lignes)

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 11 & 1 \end{vmatrix} (L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_1 \text{ et } L_3 \leftrightarrow L_3 + 3L_1)$

Donc $\Delta_2 = 0$ puisque les deux dernières lignes sont identiques.

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} (L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1)$

$\Delta_3 = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3$

2. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (en échangeant les deux premières lignes).

$\Delta_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} (L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1 \text{ et } L_4 \leftrightarrow L_4 - 3L_1)$

$\Delta_1 = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} (L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \leftrightarrow L_3 + 6L_1)$

$\Delta_1 = -\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 96$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} (L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 ; L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1 \text{ et } L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1)$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} (C_3 \leftrightarrow C_3 - C_1)$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -12$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 9 & 25 \end{vmatrix} (C_3 \leftrightarrow C_3 - C_2 \text{ et } C_4 \leftrightarrow C_4 - C_2).$$

$$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 10 \\ 2 & 9 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 19 \end{vmatrix} (L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 19 \end{vmatrix} = -3$$

Exercice 2

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix}$ (en développant par rapport à la première ligne)

$\Delta_1 = 2abc$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} (C_1 \leftrightarrow C_1 + C_2 + C_3)$$

$$\Delta_2 = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} (L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1)$$

$$\Delta_2 = (a+b+c)\left((a-b)(a-c) + (b-c)^2\right)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a-c & b-a & c+a \\ a^2-c^2 & b^2-a^2 & a^2+c^2 \\ a^3-c^3 & b^3-a^3 & a^3+c^3 \end{vmatrix} (C_1 \leftrightarrow C_1 - C_2 \text{ et } C_2 \leftrightarrow C_2 - C_3)$$

$$\Delta_3 = (a-c)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+a \\ a+c & a+b & a^2+c^2 \\ a^2+ac+c^2 & a^2+ab+b^2 & a^3+c^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = (a-c)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a+c \\ a+c & b-c & a^2+c^2 \\ a^2+ac+c^2 & b^2-c^2+a(b-c) & c^3+a^3 \end{vmatrix} (C_2 \leftrightarrow C_2 - C_1)$$

$$\Delta_3 = (a-c)(b-a)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & c+a \\ a+c & 1 & a^2+c^2 \\ a^2+ac+c^2 & a+b+c & a^3+c^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = (a-c)(b-a)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+c & 1 & -2ac \\ a^2+ac+c^2 & a+b+c & -2ac(a-c) \end{vmatrix} (C_3 \leftrightarrow C_3 - (a+c)C_1)$$

$$\Delta_3 = (a-c)(b-a)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -2ac \\ a+b+c & -2ac(a-c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = -2ac(a-c)(b-a)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & a-c \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-a)(b-c)$$

2. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a & c-a \\ a & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$

$\Delta_1 = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & c-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a & c-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a & c-a \\ 0 & c-b & 0 \\ 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$

$\Delta_1 = a(b-a)(c-b)(d-c)$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} (C_1 \leftrightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$

$\Delta_2 = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-a & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$

$\Delta_2 = (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} 1 & c & c \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & b-c & a-c \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix}$

$\Delta_2 = (a+b+2c)(a-b)\left[(a-c)^2-(b-c)^2\right] = (a+b+2c)(a-b)(a-b)(a+b-2c) =$ $(a+b+2c)(a+b-2c)(a-b)^2$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a & \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \sin a & \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{vmatrix}$

$\Delta_3 = (\cos b - \cos a)(\sin c - \sin a) - (\sin b - \sin a)(\cos c - \cos a)$.

$\Delta_3 = \cos b \sin c - \cos b \sin a - \cos a \sin c + \cos a \sin a - \sin b \cos c + \cos a \sin b +$ $\sin a \cos c - \sin a \cos a$

$\Delta_3 = \cos b \sin c - \sin b \cos c + \cos a \sin b - \sin a \cos b + \sin a \cos c - \cos a \sin c$

$\Delta_3 = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c)$

$\Delta_3 = 2\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\cos\left(\frac{a+c-2b}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\cos\left(\frac{c-a}{2}\right)$

$\Delta_3 = 2\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{a+c-2b}{2}\right) - \cos\left(\frac{c-a}{2}\right)\right)$

$\Delta_3) = 2\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)(-2\sin(c-b)\sin(a-b))$.

$\Delta_3 = -4\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\sin(c-b)\sin(a-b)$

Exercice 3

${}^tA.A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) I_4$

Le déterminant de ${}^tA.A$ est donc égal à $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4$.

Or, le déterminant de A et celui de ${}^tA$ sont égaux, donc $\det(A) = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$

Exercice 4 (*)

1. $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & ... & ... & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & ... & ... & a+x \\ ... & ... & \lambda_i+x & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & a+x \\ b+x & ... & ... & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a-\lambda_1 & ... & ... & a-\lambda_1 \\ b+x & \lambda_2-b & a-b & ... & a-b \\ ... & ... & \lambda_i-b & ... & a-b \\ ... & ... & ... & ... & a-b \\ b+x & 0 & ... & 0 & \lambda_n-b \end{vmatrix}$
   En développant par rapport à la première colonne, $\Delta_n(x)$ est donc la somme de n produit de facteurs du premier degré en x (ceux de la première colonne) par des constantes : $\Delta_n(x)$ est une fonction affine.
2. $\Delta_n(-a) = \begin{vmatrix} \lambda_1-a & 0 & ... & ... & 0 \\ b-a & \lambda_2-a & 0 & ... & 0 \\ b-a & ... & \lambda_i-a & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ b-a & ... & ... & b-a & \lambda_n-a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-a).$
   De même, on montre que $\Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-b)$.
   Or, $\Delta_n(x)$ est une fonction affine donc il existe M et P réels tels que $\Delta_n(x) = Mx+P$.
   On a donc $M = \dfrac{\Delta_n(-a)-\Delta_n(-b)}{-a+b} = \dfrac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-a) - \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-b)}{b-a}$.
   En outre, $\Delta_n(-a) = \dfrac{\Delta_n(-a)-\Delta_n(-b)}{b-a}\times(-a)+P$ donc :
   $(b-a)\Delta_n(-a) = -a\Delta_n(-a)+a\Delta_n(-b)+P(b-a)$
   On donc $P = \dfrac{b\Delta_n(-a)-a\Delta_n(-b)}{b-a}$ et $\Delta_n(x) = Mx+P$.
   $\Delta_n(0) = P = \dfrac{b\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-a) - a\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-b)}{b-a}$

Exercice 5
Voir la correction de l'exercice 6... les opérations sont identiques et on trouve $D_n = \dfrac{(-1)^n+1}{2}$

Exercice 6 (*)

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

Donc $D_n = aD_{n-1} + \begin{vmatrix} b & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a & b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & b & b-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & \dots & \dots & \dots & b \end{vmatrix}$

$D_n = aD_{n-1} + b^n$.
On a une relation de récurrence... pas très simple il faut le reconnaître. Calculons quelques valeurs de D_n :
$D_2 = \begin{vmatrix} a+b & b \\ a & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$
$D_3 = \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$
On remarque que $D_2 = \dfrac{b^3 - a^3}{b-a}$ et $D_3 = \dfrac{b^4 - a^4}{b-a}$. On émet donc la conjecture suivante :
$\forall n \geq 2, D_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$.

Initialisation ($n = 2$)
La propriété est vraie d'après ce qui précède.

Hérédité
Soit $n \geq 2$: on suppose que $D_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$ et on veut montrer que $D_{n+1} = \dfrac{b^{n+2} - a^{n+2}}{b-a}$.
D'après la relation de récurrence établie précédemment, on a $D_{n+1} = aD_n + b^{n+1}$ donc
$D_{n+1} = a\dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} + \dfrac{b^{n+2} - ab^{n+1}}{b-a} = \dfrac{b^{n+2} - a^{n+2}}{b-a}$
Ainsi, la propriété est héréditaire.

Conclusion
D'après le principe de récurrence, on a, $\forall n \geq 2, D_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$.

Exercice 7 Déterminant de Vandermonde(*)

1. $v_n(x_0, x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$

   Pour $i \in \{2, 3, ... n\}$, on effectue les opérations $L_i \leftrightarrow L_i - L_1$:

   $v_n(x_0, x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & \dots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & x_n^3 - x_0^3 & \dots & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix}$

$$v_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_1^2-x_0^2 & x_1^3-x_0^3 & \dots & x_1^n-x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n-x_0 & x_n^2-x_0^2 & x_n^3-x_0^3 & \dots & x_n^n-x_0^n \end{vmatrix}$$

On a donc, en factorisant chaque ligne L_i par (x_i-x_0) :

$v_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1+x_0 & x_1^2+x_0x_1+x_0^2 & \dots & x_1^{n-1}+x_0x_1^{n-2}+\dots+x_0^{n-1} \\ 1 & x_2+x_0 & x_2^2+x_0x_2+x_0^2 & \dots & x_2^{n-1}+x_0x_2^{n-2}+\dots+x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n+x_0 & x_n^2+x_0x_n+x_0^2 & \dots & x_n^{n-1}+x_0x_n^{n-2}+\dots+x_0^{n-1} \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftrightarrow C_2-x_0C_1$: $v_n=$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2+x_0x_1+x_0^2 & \dots & x_1^{n-1}+x_0x_1^{n-2}+\dots+x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2+x_0x_2+x_0^2 & \dots & x_2^{n-1}+x_0x_2^{n-2}+\dots+x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2+x_0x_n+x_0^2 & \dots & x_n^{n-1}+x_0x_n^{n-2}+\dots+x_0^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$C_3 \leftrightarrow C_3-x_0C_2-x_0^2C_1 : v_n=\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}+x_0x_1^{n-2}+\dots+x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}+x_0x_2^{n-2}+\dots+x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}+x_0x_n^{n-2}+\dots+x_0^{n-1} \end{vmatrix}$$

Par opérations successives $C_i \leftrightarrow C_i-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}x_0^kC_{i-k}$: $v_n=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_0)\,v_{n-1}(x_1,\dots,x_n)$

2. Montrons par récurrence la propriété : $\forall n\geq 2,\ v_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\prod_{0\leq i<j\leq n}\left(x_i-x_j\right)$.

Initialisation $(n=2)$
$v_2(x_0,x_1)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_0$ donc la propriété est vraie au rang 2.

Hérédité
Soit $n\geq 2$: on suppose que $v_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\prod_{0\leq i<j\leq n}\left(x_i-x_j\right)$ et on veut montrer que $v_{n+1}(x_0,x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=\displaystyle\prod_{0\leq i<j\leq n+1}\left(x_i-x_j\right)$.
D'après la propriété montrée à la question précédente, on a :
$v_{n+1}(x_0,x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}(x_i-x_0)\,v_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=$
$\displaystyle\prod_{i=0}^{n+1}(x_i-x_0)\times\prod_{1\leq i<j\leq n}\left(x_i-x_j\right)=\prod_{0\leq i<j\leq n+1}\left(x_i-x_j\right)$
Ainsi, la propriété est héréditaire.

Conclusion
D'après le principe de récurrence, $\forall n\geq 2,\ v_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\prod_{0\leq i<j\leq n}\left(x_i-x_j\right)$.

Exercice 8(*)
Soit $a\in\mathbb{C}$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère le déterminant d'ordre $n+1$:

$$d_n = \begin{vmatrix} 2a & a+1 & 0 & \cdots & 0 \\ a-1 & 2a & a+1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & a+1 \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & 2a \end{vmatrix}$$

1. $d_0 = 2a$ et $d_1 = \begin{vmatrix} 2a & a+1 \\ a-1 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2+1$.

2. Soit $n \geq 2$: $d_n = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a-1 & 2a & a+1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & a+1 \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & 2a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a+1 & 0 & \cdots & 0 \\ a-1 & 2a & a+1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & a+1 \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & 2a \end{vmatrix}$

$$d_n = 2ad_{n-1} - (a+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a-1 & 2a & a+1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & a+1 \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & 2a \end{vmatrix}$$

$$d_n = 2ad_{n-1} - (a+1) \begin{vmatrix} a-1 & a+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2a & a+1 & \dots & 0 \\ 0 & a-1 & 2a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a-1 & 2a \end{vmatrix} = 2ad_{n-1} + \left(1-a^2\right) d_{n-2}$$

3. On cherche donc l'expression d'une suite d_n telle que
$\begin{cases} d_0 = 2a, d_1 = 3a^2+1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+2} - 2ad_{n+1} + \left(a^2-1\right) d_n = 0 \end{cases}$
L'équation caractéristique associée est $X^2 - 2aX + a^2 - 1 = 0$, équation qui admet deux solutions réelles $X_1 = a-1$ et $X_2 = a+1$.
Ainsi, il existe deux réels α et β tels que, pour tout entier n, on ait
$d_n = \alpha(a-1)^n + \beta(a+1)^n$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système $\begin{cases} \alpha + \beta & = & 2a \\ \alpha(a-1) + \beta(a+1) & = & 3a^2+1 \end{cases}$
On trouve $\alpha = -\dfrac{(a-1)^2}{2}$ et $\beta = \dfrac{(a+1)^2}{2}$
Enfin, on a donc $d_n = \dfrac{(a+1)^{n+2} - (a-1)^{n+2}}{2}$