TD Chapitre 2 : Déterminants

Exercice 1
Calculer les déterminants suivants en faisant apparaître le maximum de zéros sur une ligne ou sur une colonne.

1. a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2. a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$.

Exercice 2
Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

1. a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ c)**(*)** $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

2. a) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ c) **(*)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$

Exercice 3
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$
Calculer ${}^tA.A$ et en déduire $\det(A)$.

Exercice 4 (*)
On pose $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & ... & ... & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & ... & ... & a+x \\ ... & ... & \lambda_i+x & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & a+x \\ b+x & ... & ... & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}$

1. Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine.
2. Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$

Exercice 5

Calculer en établissant une relation de récurrence : $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 6 (*)

Calculer en établissant une relation de récurrence : $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$.

Exercice 7 Déterminant de Vandermonde(*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels.

On note $v_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

1. Au moyen de manipulations élémentaires sur les lignes, montrer que :

$$v_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})\, v_{n-1}(x_1, \dots, x_0)$$

2. En déduire une expression factorisée de $v_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ en fonction de $x_0, .., x_n$.

Exercice 8(*)

Soit $a \in \mathbb{C}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le déterminant d'ordre $n+1$:

$$d_n = \begin{vmatrix} 2a & a+1 & 0 & \cdots & 0 \\ a-1 & 2a & a+1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & a+1 \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & 2a \end{vmatrix}$$

1. Calculer d_0 et d_1.
2. Déterminer une relation de récurrence entre d_n, d_{n-1} et d_{n-2} pour tout $n \geq 2$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de d_n en fonction de n.