Chapitre 1 : Exemples corrigés

Exemple 1 : divergence de la série harmonique

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+k} \geq \frac{1}{2}$.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $\displaystyle S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
3. En déduire la divergence de la série harmonique.

Corrigé de l'exemple 1

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq k \leq 2^n$, on a $2^n + k \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ donc $\displaystyle\frac{1}{2^n+k} \geq \frac{1}{2n+1}$
Par suite, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+k} \geq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^n} 1 = \frac{1}{2^{n+1}} \times 2^n$, soit le résultat attendu :
$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+k} \geq \frac{1}{2}$$
2. *Première méthode : par récurrence sur n*
<u>Initialisation $(n=2)$</u> :
Au rang 2, la propriété s'écrit $S_4 \geq 1 + \dfrac{2}{2}$ soit $S_4 \geq 2$.
Or, $S_4 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{12} \geq 2$.
Ainsi, la propriété est initialisée au rang $n = 2$.
<u>Hérédité</u> :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 :
On suppose que $S_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$ et on veut montrer que $S_{2^{n+1}} \geq 1 + \dfrac{n+1}{2}$.
Or,$\displaystyle S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = S_{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+k}$.
En utilisant à la fois l'hypothèse de récurrence et la propriété démontée au **1.**, on a donc :
$S_{2^{n+1}} \geq 1 + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}$ soit $S_{2^{n+1}} \geq 1 + \dfrac{n+1}{2}$ et la propriété est donc héréditaire.
<u>Conclusion</u> :
La propriété est vraie au rang $n = 2$ et et héréditaire donc d'après le principe de récurrence :
$$\forall n \geq 2, S_{2^n} =\geq 1 + \frac{n}{2}$$
Deuxième méthode : méthode directe

On partitionne l'ensemble des entiers de 2 à 2^n en n ensembles dont les bornes supérieures sont les puissances de 2 :
— $\{2\}$
— $\{3;4\}$
— $\{5;6;7;8\}$
— ...
— $\{2^j+1;2^j+2;...;2^{j+1}\}$
— ...
— $\{2^{n-1}+1;2^{n-1}+2;...;2^n\}$

On a donc $S_{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{2^j} \frac{1}{k+2^j} \right)$

D'après la question **1.**, chaque terme $\displaystyle\sum_{j=1}^{2^j} \frac{1}{k+2^j}$ de cette somme est minoré par $\dfrac{1}{2}$ donc on a :

$S_{2^n} \geq 1 + \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2}$ soit le résultat attendu.

3. On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{n}{2} = +\infty$ donc par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$.
On a donc trouvé une suite extraite de (S_n) divergente, ce qui prouve la divergence de la série harmonique.

Exemples 2 : télescopage

1. Soit $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Montrer que $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la nature de la série de terme général a_n.

2. Soit $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Montrer que la série de terme général a_n diverge.

3. Soit $a_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}}$.
Montrer que $a_n = \tan\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la nature de la série de terme général a_n.

Corrigé de l'exemple 2

1. Soit $n > 0$:
Première méthode : en utilisant le résultat de l'énoncé
$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = a_n$.
Deuxième méthode : par identification
On cherche deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$

On a $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} = \dfrac{a(n+1)+bn}{n(n+1)} = \dfrac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$ donc a et b sont solution du système :
$\begin{cases} a+b &= 0 \\ a &= 1 \end{cases}$ donc $a = 1$ et $b = -1$ et on a donc le résultat attendu.

Troisième méthode : méthode algébrique
On cherche deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$ $\qquad (*)$

En multipliant les deux membres de l'égalité (*) par n, on trouve $\dfrac{1}{n+1} = a + \dfrac{bn}{n+1}$
Puis, en prenant $n = 0$ dans l'égalité précédente, on trouve $a = 1$.

En multipliant les deux membres de l'égalité (*) par $n+1$, on trouve $\dfrac{1}{n} = \dfrac{a(n+1)}{n} + b$
Puis, en prenant $n = -1$ dans l'égalité précédente, on trouve $b = -1$.

Soit $n > 0$: on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$.

On a donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$.

Par télescopage, on a donc $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
La suite des sommes partielles (S_n) converge donc vers 1 donc la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge vers $\sum_{n=1}^{+\infty} a_k = 1$.

2. Soit $n > 0$: on a $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

   On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on a donc :

   $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n}$

   $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{n} - \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n}$.

   Par télescopage, on a donc $S_n = \sqrt{n+1}$.
   La suite des sommes partielles (S_n) diverge donc vers $+\infty$ donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge vers $+\infty$.

3. Soit $n > 0$: on a $a_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$

   On a donc $a_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$

   On a donc $a_n = \tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}$.

   Soit $n > 0$: on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\tan\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k+1}\right)$.

   On a donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \tan\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \tan\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \tan\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \tan\frac{1}{k}$.

   Par télescopage, on a donc $S_n = \tan 1 - \tan\frac{1}{n+1}$.

   On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et comme la fonction tangente est continue en 0,
   $\lim_{n\to+\infty} \tan\frac{1}{n+1} = \tan 0 = 0$
   La suite des sommes partielles (S_n) converge donc vers $\tan 1$ donc la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge vers $\sum_{n=1}^{+\infty} a_k = \tan 1$.

Exemples 3
Dire si les séries suivantes convergent. Donner leur somme partielle d'ordre n. Si elles convergent, donner leur somme et leur reste.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{3^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-2)^n}{5^{n+3}}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 4}(-3)^n$

Corrigé de l'exemple 3

1. Cette série est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc elle converge.
   Soit $n\in\mathbb{N}$: on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$.
   On a $S_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=2$.
   Cette série converge donc vers 2.
   $R_n=2-S_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
2. Cette série est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ donc elle converge.
   $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{9}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{3^{n-2}}=\frac{1}{9}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$.
   Soit $n\in\mathbb{N}$: on pose $S_n=\displaystyle\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$.
   On a $S_n=\dfrac{1}{9}\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.
   Donc $S_n=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
   $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}$.
   Cette série converge donc vers $\dfrac{1}{6}$.
   $R_n=\dfrac{1}{6}-S_{n-2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$.
3. On réécrit la série : $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-2)^n}{5^{n+3}}=\frac{1}{5^3}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$.
   Cette série est une série géométrique de raison $-\dfrac{2}{5}$ donc elle converge.
   Soit $n\in\mathbb{N}$: on pose $S_n=\displaystyle\frac{1}{125}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{2}{5}\right)^k$.

On a $S_n = \frac{1}{125}\frac{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{1}{125}\times\frac{5}{7}\left(1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$.

Donc $S_n = \frac{1}{175} - \frac{1}{175}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{175}$.

Cette série converge donc vers $\frac{1}{175}$.

$R_n = \frac{1}{175} - S_n = \frac{1}{175}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = 1$ donc la série diverge grossièrement.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

Exemples 4 : séries à termes positifs

Dans chaque cas, utiliser l'une des propriétés précédentes pour déterminer la convergence ou la divergence des séries de terme général a_n.

1. $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$
2. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$
3. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}$
4. $a_n = \sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
5. $a_n = \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $a_n = \frac{n!}{n^n}$

Corrigé de l'exemple 4

1. La série est définie pour $N \geq$ et à termes positifs pour $n \geq 2$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ par croissances comparées donc, pour n assez grand, on a $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \leq 1$ et donc $a_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
   Ainsi, cette série est convergente d'après le critère de comparaison.
2. Pour $n \geq 2$, la série est définie et à termes positifs.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ par croissances comparées donc, pour n assez grand, on a $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \leq 1$ et donc $\sqrt{n}\ln n \leq n$ et $a_n \geq \frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente.
   Ainsi, cette série est divergente d'après le critère de comparaison.
3. $\sqrt{n}\cos^2 n = 0 \iff \cos n = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\pi = \frac{n}{2k}$ ce qui est absurde.
   Ainsi, la série est définie et à termes positifs pour $n \geq 1$.
   Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\cos^2 n \leq 1$ donc $a_n \geq \frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente.

Ainsi, cette série est divergente d'après le critère de comparaison.

4. La série est définie pour $n \geq 1$.
   On écrit un développement limité en 0 de son terme général :
   $\sin u \underset{0}{=} u + o\left(u^2\right)$ et $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$.
   On a donc $a_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
   La série est donc à termes positifs à partir d'un certain rang, et son terme général est équivalent à celui d'une série de Riemann convergente donc cette série converge.

5. On différencie les cas en fonction du paramètre α :
   — Premier cas : si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{\pi}$: la série diverge grossièrement.
   — Deuxième cas : si $\alpha = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{1+\pi/2}$: la série diverge grossièrement.
   — Troisième cas : si $\alpha > 0$ alors la série est à termes positifs et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ elle est définie pour n assez grand.
   En outre, $\arctan n$ est négligeable devant n^α et donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$. Le terme général est donc équivalent à celui d'une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha > 1$.

   Finalement, la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

6. La série est définie et à termes positifs pour $n \geq 1$.
   Compte tenu de la forme du terme général (quotient), on cherche à appliquer le critère de Riemann : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \dfrac{n^n}{n!} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.
   $\ln(1-u) \underset{0}{=} -u + o(u)$ donc $n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} -1 + o(1)$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = -1$ et par composition par la fonction exponentielle continue en -1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}^{-1} < 1$: la série converge d'après le critère de Riemann.

Exemple 5 : divergence de la série harmonique (v2)

1. Montrer que $\ln(n+1) - \ln n \sim \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que la série harmonique diverge.

Corrigé de l'exemple 5

1. $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
2. Montrons que la série de terme général $\ln(n+1) - \ln n$ diverge.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k)$.
   On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n+1} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k$
   Donc $S_n = \ln(n+1)$, on en déduit que la série de terme général $\ln(n+1) - \ln n$ diverge.
   La série harmonique (à termes positifs...) diverge donc d'après le critère d'équivalence.

Exemple 6 : série harmonique alternée

On considère $\sum a_n$ la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$. On note S_n sa somme partielle d'ordre n.

1. Rappeler pourquoi $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente (trois méthodes au choix).
2. Dans la suite, on se propose de montrer que cette série converge et de donner la valeur exacte de la somme de cette série.
   a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} \mathrm{d}t$.
   b. Montrer que $\left|(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n+1}$, puis que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t$ et conclure.

Corrigé de l'exemple 6

1. La série harmonique est divergente (voir les exemples plus haut) donc $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente.
2. **a.** Soit $k \geq 1$: $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1} \mathrm{d}t = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \frac{1}{k}$.
   On a donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} \mathrm{d}t$
   Par linéarité de l'intégrale, on a donc $S_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k t^{k-1}\right) \mathrm{d}t$
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k t^{k-1} = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} = -\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1} = -\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = -\frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}$
   Donc $S_n = -\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} \mathrm{d}t$.
   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{t^n}{1+t}\right| \mathrm{d}t$ d'après l'inégalité de la moyenne.
   De plus, pour $t \in [0,1]$, on a $\dfrac{t^n}{1+t} \geq 0$ donc $\left|(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$
   Pour $t \in [0,1]$, on a $1+t \geq 1$ donc $\dfrac{1}{1+t} \leq 1$ et comme $0 \leq t^n \leq 1$, $\dfrac{t^n}{1+t} \leq t^n$.
   On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$
   Finalement, on a bien $\left|(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n+1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|S_n - \left(-\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t\right)\right| = \left|-\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t\right|$
   $\left|S_n - \left(-\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t\right)\right| = \left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n+1}$ d'après ce qui précède.
   D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t$.
   Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = [-\ln(1+t)]_0^1 = -\ln 2$.
   Finalement,la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers
   $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$