Chapitre 1 : Séries numériques

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions

Définition 1 : somme partielle et série

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On appelle somme partielle d'indice n le nombre $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

On appelle série de terme général a_n, et on note $\sum a_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque

Si la suite (a_n) est définie seulement à partir de l'entier $n_0 > 0$, on définit la série à partir de n_0 et on la note $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$.

Exemples

1. La série harmonique de terme général $a_n = \dfrac{1}{n}$ a pour somme partielle d'indice n $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. On montrera que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.
2. La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ a pour somme partielle d'indice n $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$. On peut montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.
3. La série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ a pour somme partielle d'indice n $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$. On peut montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \mathrm{e}$.

Définition 2 : série convergente

La série de terme général a_n est dite convergente si la suite des sommes partielles S_n converge. Cette limite est alors notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

La série de terme général a_n est dite divergente si la suite des sommes partielles S_n diverge.

Propriété 1 : série de terme général complexe

Soit $\sum z_n$ la série de terme général z_n avec $z_n \in \mathbb{C}$.
Alors la série $\sum z_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ convergent.
Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.

Propriété 2 : ensemble des séries convergentes

L'ensemble des séries **convergentes** sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.
En particulier, si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont **deux séries convergentes**, et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$:

1. $\sum (\lambda a_n)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
2. $\sum (\lambda a_n + \mu b_n)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

Définition 3 : reste d'une série d'ordre *n*

Soit $\sum a_n$ une série convergente. Le reste d'ordre n de la série est le nombre

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Il est noté $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Propriété 3 : série convergente et restes

Soit $\sum a_n$ une série convergente. Alors la série des restes R_n converge vers 0.

Propriété 4 : condition nécessaire de convergence

Soit $\sum a_n$ une série convergente. Alors le terme général a_n converge vers 0.

Remarque :
Cette condition est **nécessaire mais non suffisante**, comme le prouve le contre-exemple importantissime suivant.

Exemple 1 : divergence de la série harmonique

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que
$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+k} = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^n+2^n} \geq \frac{1}{2}$.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
3. En déduire la divergence de la série harmonique.

Exemples 2 : télescopage

1. **KHOLLE** Soit $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Montrer que $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et en déduire la nature de la série de terme général a_n.
2. **KHOLLE** Soit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. Montrer que la série de terme général a_n diverge.
3. Soit $a_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$.
Montrer que $a_n = \tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}$ et en déduire la nature de la série de terme général a_n.

2 Séries géométriques

Définition 4 : série géométrique

Soit $\sum a_n$ une série de terme général a_n où (a_n) est une suite géométrique de raison α et de premier terme a_0.
On dit alors que la série $\sum a_n$ est une série géométrique de raison α.

Propriété 5 : convergence des séries géométriques

Soit $\sum \alpha^n$ une série géométrique. Alors :

1. si $\alpha \neq 1$ alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$
2. Si $\alpha = 1$ alors $S_n = n+1$.
3. Une série géométrique de raison α converge si et seulement si $|\alpha| < 1$.

Exemples 3 **KHOLLE**
Dire si les séries suivantes convergent. Donner leur somme partielle d'ordre n. Si elles convergent, donner leur somme et leur reste.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{3^n}$
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^n}{5^{n+3}}$
4. $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$
5. $\sum_{n\geq 4} (-3)^n$

3 Séries à termes positifs

Propriété 6 : majoration des sommes partielles

Soit (a_n) une suite réelle à termes positifs.
Alors $\sum a_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles S_n est majorée.
Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \mathrm{Sup} S_n$.

Propriété 7 : majoration et minoration

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles à termes positifs telles que, $\forall n \geq n_0$, $0 \leq a_n \leq b_n$.

1. Si $\sum b_n$ converge alors $\sum a_n$ converge.
2. Si $\sum a_n$ diverge alors $\sum b_n$ diverge.

Propriété 8 : critère d'équivalence

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles à termes positifs telles que a_n et b_n soient équivalents au voisinage de $+\infty$.
Alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Propriété 9 : règle de d'Alembert

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs, telle que le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ admette une limite finie ℓ. Alors :

1. Si $\ell < 1$, la série converge.
2. Si $\ell > 1$, la série diverge.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Définition 5 : série de Riemann

Une série de Riemann est une série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriété 10 : convergence des séries de Riemann

La série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemples 4 : séries à termes positifs
Dans chaque cas, utiliser l'une des propriétés précédentes pour déterminer la convergence ou la divergence des séries de terme général a_n.

1. <u>**KHOLLE**</u> $\quad a_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$
2. <u>**KHOLLE**</u> $\quad a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$
3. <u>**KHOLLE**</u> $\quad a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}$
4. <u>**KHOLLE**</u> $\quad a_n = \sin\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
5. $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha + \arctan n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Exemple 5 : divergence de la série harmonique (v2)

1. Montrer que $\ln(n+1) - \ln n \sim \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que la série harmonique diverge.

4 Séries absolument convergentes

Définition 6 : série absolument convergente

Une série $\sum a_n$ à termes réels ou complexes est dite absolument convergente si la série $\sum |a_n|$ est convergente.

Propriété 11 : convergence et absolue convergence

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Alors la série $\sum a_n$ est convergente et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

Remarques
La réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple :

Exemple 6 : série harmonique alternée
On considère $\sum a_n$ la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$. On note S_n sa somme partielle d'ordre n.

1. Rappeler pourquoi $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente (trois méthodes au choix).
2. Dans la suite, on se propose de montrer que cette série converge et de donner la valeur exacte de la somme de cette série.
   a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} \mathrm{d}t$.
   b. Montrer que $\left|(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n+1}$, puis que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t$ et conclure.