# TD Chapitre 1 : Séries numériques - CORRECTION

**Exercice 1**

1. Pour $n > 1$, on a $a_n > 0$.
On sait que $\ln n \underset{+\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\right)$ donc pour $n$ assez grand, $\ln n \leq \sqrt{n}$ et donc $a_n \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
Ainsi, $\sum a_n$ converge.

2. Pour $n > 1$, on a $a_n > 0$ et $\ln n \geq 1$ donc $a_n \geq \dfrac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente donc $\sum a_n$ diverge.

3. Pour $n \geq 1$, on a $a_n > 0$ et $a_n \underset{+\infty}{\sim} n \times \dfrac{1}{n} = 1$ : $\sum a_n$ diverge grossièrement.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ donc $\sum a_n$ diverge grossièrement.

5. Pour $n > 1$, on a $a_n > 0$ et $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1$ : $\sum a_n$ diverge grossièrement.

6. Pour $n > 1$, on a $a_n > 0$ et comme $\sin^2 n \leq 1$, on a $a_n \geq \dfrac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente donc $\sum a_n$ diverge.

7. Pour $n \geq 0$, on a $a_n > 0$ et $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente donc $\sum a_n$ diverge.

8. Pour $n \geq 0$, on a $a_n > 0$ et $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente donc $\sum a_n$ converge.

9. Pour $n \geq 0$, on a $a_n > 0$ et $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{4/3}}{n^{5/2}} = \dfrac{1}{n^{7/6}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc $\sum a_n$ converge.

10. Pour $n \geq 0$, on a $a_n > 0$.
$n \underset{+\infty}{=} o(4^n)$ et $2n^4 \underset{+\infty}{=} o(5^n)$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{5^n} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente donc donc $\sum a_n$ converge.

11. Pour $n > 1$, on a $a_n > 0$.
On sait que $\ln n \underset{+\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\right)$ donc pour $n$ assez grand, $\ln n \leq \sqrt{n}$ et donc $a_n \leq \dfrac{1}{n^{7/2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
Ainsi, $\sum a_n$ converge.

12. Pour $n > 1$, on a $a_n > 0$.
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \dfrac{n^n}{2^n n!} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \times \dfrac{1}{2}$
$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)\right)$
$n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \underset{0}{=} n \times \left(-\dfrac{1}{n+1} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = -1$.
La fonction exponentielle étant continue en -1, $\lim\limits_{n\to\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)\right) = \mathrm{e}^{-1}$
Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2} < 1$ donc la série $\sum a_n$ converge d'après le critère de d'Alembert.

**13.** Pour $n$ assez grand, on a $n^4+3n^2+n>0$ et $n^4+2n^2-n+1>0$.
Ainsi, pour $n$ assez grand,
$\dfrac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}>1 \Longleftrightarrow n^4+3n^2+n>n^4+2n^2-n+1 \Longleftrightarrow 5n^2-2n+1>0$ ce qui est vrai pour tout entier $n$.
Ainsi, pour $n$ assez grand, $a_n>0$.
De plus, $\dfrac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}=1+\dfrac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1}$.
On a donc $a_n \underset{\infty}{=} \dfrac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc $a_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
Ainsi, $\sum a_n$ converge.

**14.** Pour tout $n\geq 0$, on a $a_n>0$.
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\mathrm{e}^{-3}<1$ donc la série est convergente d'après le critère de d'Alembert.

**Exercice 2**

1. **CCP**

   **a.** Pour $n>1$,on a $a_n>0$.
   On sait que $\ln n \underset{+\infty}{=} o\left(n^{1/4}\right)$ donc pour $n$ assez grand, $\ln n \leq n^{1/4}$ et donc $a_n \leq \dfrac{1}{n^{5/4}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
   Ainsi, $\sum a_n$ converge.

   **b.** Pour tout$n\geq 0$, on a $a_n>0$.
   De plus, $a_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente donc $\sum a_n$ converge.

   **c.** Pour tout $n>0$,on a $|a_n|\leq \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
   Donc $\sum a_n$ est absolument convergente, donc convergente.

   **d.** Pour $n>0$,on a $\sin n \leq 1 \leq n$ donc $a_n$ est défini et $a_n>0$.
   On sait que $\sin n \underset{\infty}{=} o\left(n^2\right)$ donc $a_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
   Ainsi, $\sum a_n$ converge.

   **e.** $\sqrt[n]{n}=n^{1/n}\exp\left(\dfrac{1}{n}\ln n\right)$.
   Or, $\ln n \underset{\infty}{=} o(n)$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ et comme la fonction exponentielle est continue en 0, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ et la série $\sum a_n$ est grossièrement divergente.

   **f.** Pour tout $n>0$, on a $a_n>0$ et $a_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente, donc $\sum a_n$ diverge.

   **g.** Pour tout $n>0$, on a $a_n>0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!}\times\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}=\dfrac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$
   Donc $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{27n^3}=\dfrac{1}{27}<1$ donc la série $\sum a_n$ converge d'après le critère de d'Alembert.

**h.** On sait que $\cos n$ n'admet pas de limite en $\infty$ donc $\sum a_n$ diverge grossièrement.

**2. Centrale**

**a.** Pour $n > 0$,on a $a_n > 0$ et $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}a^{2n}$.
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n(n+1)}{2} \times \dfrac{2}{n(n-1)}a^2 = \dfrac{n+1}{n-1}a^2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a^2$.

— **1er cas** : $|a| < 1$ alors la série converge d'après le critère de d'Alembert.
— **2e cas** : $|a| > 1$ alors la série diverge d'après le critère de d'Alembert.
— **3e cas** : $a = 1$ ou $a = -1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

**b.** Pour $n > 0$, on a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
$n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{\infty}{=} n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
On a donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{\infty}{=} \mathrm{e}\exp\left(-\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{\infty}{=} \mathrm{e}\left(1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
Finalement, $a_n \underset{\infty}{=} \dfrac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ : $a_n > 0$ au voisinage de $\infty$ et son terme général est équivalent à $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ multiplié par celui de la série harmonique qui diverge vers $+\infty$ : $\sum a_n$ diverge vers $+\infty$.

**c.** Soit $n \geq 0$, on écrit la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.
$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt[n]{n} - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \sqrt[n]{n} = -\sqrt[n+1]{n+1}$.
$\sqrt[n+1]{n+1} = (n+1)^{1/(n+1)} \exp\left(\dfrac{1}{n+1}\ln(n+1)\right)$.
Or, $\ln(n+1) \underset{\infty}{=} o(n+1)$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$ et comme la fonction exponentielle est continue en 0, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$
Finalement, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -1$ donc la série $\sum a_n$ converge vers -1.

**d.** Pour $n \geq 0$, $a_n > 0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{(n+1)x}}{2^{nx}} = 2^x$

— **1er cas** : si $x < 0$ alors $2^x < 1$ et la série converge d'après le critère de d'Alembert.
— **2e cas** : si $x > 0$ alors $2^x > 1$ et la série diverge d'après le critère de d'Alembert.
— **3e cas** : si $x = 0$ alors $a_n = 1$ pour tout $n \geq 0$ et la série diverge grossièrement.

**e.** Pour $n > 0$,on a $a_n > 0$.
On sait que $\ln n \underset{\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\right)$ donc, pour $n$ assez grand, on a $\ln^2 n \leq n$ et $a_n \geq \dfrac{1}{n}$ qui est le terme général de la série harmonique divergente.
La série $\sum a_n$ diverge vers $+\infty$.

**f.** — **1er cas** : si $a < -1$ ou $a > 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ et la série diverge grossièrement.
— **2e cas** : pour $a = 1$, la série est à terme positifs et $a_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ qui est le terme général de la série harmonique divergente donc la série $\sum a_n$ diverge.
— **3e cas** : pour $a = -1$, on a $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ qui est le terme général d'une série alternée convergente (voir exemple du cours) donc la série $\sum a_n$ converge.

— **4e cas** : pour $|a|<1$, on a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|a|^{n+1}}{n+2} \times \dfrac{n+1}{|a|^n} = \dfrac{n+1}{n+2}|a|$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |a| < 1$.
Donc la série $\sum a_n$ converge d'après le critère de d'Alembert.

Finalement, la série $\sum a_n$ converge si et seulement si $|a|<1$ ou $a=-1$.

**g.** Pour $n>0$, on a $a_n>0$ et $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \times \dfrac{a^n}{n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \times \dfrac{a^n}{n}$.
On montre facilement (comme on l'a déjà fait dans ce TD, à la question **2.b.** de cet exercice) que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{\infty}{\sim} \mathrm{e}$ et donc $a_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{n} \times a^n$.

— **1er cas** : si $0<a<1$ alors $a_n \leq \mathrm{e}\times a^n$ qui est le terme général d'un série géométrique convergente donc la série converge d'après le théorème de comparaison.

— **2e cas** : si $a>1$ alors comme $n \underset{\infty}{=} o(a^n)$, la série diverge grossièrement.

— **3e cas** : si $a=1$ alors $a_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{n}$ qui est,au coefficient multiplicateur e près, le terme général de la série harmonique divergente donc $\sum a_n$ diverge.

**Exercice 3**

**1.** Soit $a, b, c$ les réels cherchés.

— en multipliant les deux membres par $X$, on a :

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)} = a + \frac{bX}{X+1} + \frac{cX}{X+2}$$

Soit, en prenant $X=0, a=\dfrac{1}{2}$.

— en multipliant les deux membres par $X+1$, on a :

$$\frac{1}{X(X+2)} = \frac{a(X+1)}{X} + b + \frac{c(X+1)}{X+2}$$

Soit, en prenant $X=-1$, $b=-1$.

— en multipliant les deux membres par $X+2$, on a :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{a(X+2)}{X} + \frac{b(X+2)}{X+1} + c$$

Soit, en prenant $X=-2$, $c=\dfrac{1}{2}$

On a donc $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)} = \dfrac{1/2}{X} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1/2}{X+2}$.

**2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+1}\right) + \left(\frac{1/2}{k+2} - \frac{1/2}{k+1}\right)\right]$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right)$

On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$.

La limite des sommes partielles est égale à $\dfrac{1}{4}$ donc la série $\displaystyle\sum_{n>0} u_n$ converge vers $\dfrac{1}{4}$.

**Exercice 4**

1. On cherche $a$ et $b$ réels tels que pour tout $n \geq 2$, on ait $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{a}{n-1}$.
   En procédant comme à l'exercice 3, on trouve $a = -1$ et $b = 1$.
   Soit $n \geq 2$ : on écrit la somme partielle $S_n$.
   $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1}\right) = -\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$
   Donc $S_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 1$.
   La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n = 1$.
2. Pour tout entier $n$, on a $a_n = (1-\mathrm{e}) \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$ donc $a_n$ est une série géométrique de premier terme $(1-\mathrm{e})$ et de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   Soit $n \geq 0$ : on écrit la somme partielle $S_n$.
   $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = (1-\mathrm{e})\,\frac{1-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}$
   On a donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = (1-\mathrm{e}) \times \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = -\mathrm{e}$.
   La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\mathrm{e}$.
3. On cherche $a$ et $b$ réels tels que pour tout $n \geq 1$, on ait $\dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{a}{n+1}$.
   En procédant comme à l'exercice 3, on trouve $a = 2$ et $b = -2$.
   Soit $n \geq 1$ : on écrit la somme partielle $S_n$.
   $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) - 5\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$
   $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{k} - 5 \times \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 2 - \frac{2}{n+1} - 5 \times \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$
   Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 2 - 5 \times \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 - 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$
   La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{2}$.
4. On cherche $a$, $b$ et $c$ réels tels que pour tout entier $n \geq 3$, on ait
   $\dfrac{4n-3}{n(n^2-4)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n-2} + \dfrac{c}{n+2}$.
   — en multipliant les deux membres par $n$, on a :
   $$\frac{4n-3}{(n-2)(n+2)} = a + \frac{bn}{n-2} + \frac{cn}{n+2}$$
   Soit, en prenant $n = 0, a = \dfrac{3}{4}$.

— en multipliant les deux membres par $n-2$, on a :

$$\frac{4n-3}{n(n+2)} = \frac{a(n-2)}{n} + b + \frac{c(n-2)}{n+2}$$

Soit, en prenant $n=2$, $b = \frac{5}{8}$.

— en multipliant les deux membres par $n+2$, on a :

$$\frac{4n-3}{n(n-2)} = \frac{a(n+2)}{n} + \frac{b(n+2)}{n-2} + c$$

Soit, en prenant $n=-2$, $c = -\frac{11}{8}$

$$\frac{4n-3}{n(n^2-4)} = \frac{3/4}{n} + \frac{5/8}{n-2} + \frac{-11/8}{n+2}$$

Soit $n \geq 3$ : on écrit la somme partielle $S_n$ :

$S_n = \sum_{k=3}^{n} a_k = \sum_{k=3}^{n} \frac{3/4}{k} + \frac{5/8}{k-2} + \frac{-11/8}{k+2}$

$S_n = \frac{3}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{5}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{11}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}$

$= \left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{11}{8}\right)\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) + \frac{5}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) -$
$\frac{11}{8}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{3}{4}\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) + \frac{5}{8}\times\frac{25}{12} - \frac{11}{8}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

Donc $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{167}{96}$.

La série $\sum_{n\geq 3} a_n$ converge vers $\sum_{n=3}^{\infty} a_n = \frac{167}{96}$.

**Exercice 5**

**1.** $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{(k)^\alpha}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = 1 - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha}$.

**2.** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^\alpha} = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \frac{1}{2^\alpha}$.

La série converge donc vers $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2^\alpha}$.

**3.** $R_n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n - S_n = 1 - \frac{1}{2^\alpha} - \sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{2^\alpha} - \left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

Donc $R_n = \frac{1}{n^\alpha}\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha}\left(1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right)$.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \underset{0}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On en déduit que $R_n \underset{0}{=} \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$

**Exercice 6**

1. La fonction qui à $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ étant paire, le coefficient d'ordre 3 de son développement limité en 0 est nul et :
$\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{1/2} \underset{\infty}{=} 1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

2. Soit $n>0$ : $a_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(n\pi\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)$
$a_n \underset{\infty}{=} \sin\left(n\pi\left(1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ :
— si $n$ est pair alors $\sin(n\pi+\alpha)=\sin(\alpha)$ ;
— si $n$ est impair alors $\sin(n\pi+\alpha)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha)$.
On a donc, $\forall n\in\mathbb{N}, \sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\sin(\alpha)$. Finalement, on a bien
$a_n = (-1)^n\dfrac{\pi}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3. La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente (c'est la série alternée à connaître par coeur puisqu'elle constitue l'exemple parfait d'une série convergente et non absolument convergente...) donc la série de terme général $(-1)^n\dfrac{\pi}{2n}$ converge, et par suite la série de terme général $a_n$ converge.

**Exercice 7**

1. Rappel : inégalité de Taylor-Lagrange :
Soit $f$ une fonction d'un intervalle $I$, $a\in I$.
On suppose que $f$ est $(n+1)$ fois dérivable sur $I$ et qu'il existe un réel $M$ tel que $\forall x\in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M$. Alors :

$$\forall x\in I, \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$ :
on se place sur l'intervalle $I=[0,x]$ si $x>0$ et sur l'intervalle $I=[x,0]$ si $x<0$.
La fonction exponentielle est de classe $C^\infty$ sur $I$ et $\forall p\in\mathbb{N}^*, \left(\exp\right)^{(p)}(y)=\mathrm{e}^y$.
Si $x>0$ alors $\forall y\in I$, on a $\mathrm{e}^y\leq\mathrm{e}^x$ et on prend alors $M=\mathrm{e}^x$.
Si $x<0$ alors $\forall y\in I$, on a $\mathrm{e}^y\leq 1$ et on prend alors $M=1$.
La fonction exponentielle satisfaisant à toutes les conditions de l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leq\frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$x$ étant fixé, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x$.

La série de terme général $\dfrac{x^k}{k!}$ converge donc vers $\mathrm{e}^x$, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}$ : on définit la fonction $S_n$ par pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
$S_n$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes usuels.
$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $S_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\frac{x^{k-1}}{k!}$ et $xS_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{x^k}{k!}$.
Cette fonction est à nouveau dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\left(xS_n'\right)'(x) = S_n'(x) + xS_n''(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\frac{x^{k-1}}{k!}$ et $xS_n'(x) + x^2S_n''(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} k^2\frac{x^k}{k!}$.
Cette fonction étant à nouveau dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :
$\left(xS_n'(x) + x^2S_n''(x)\right)' = S_n'(x) + 3xS_n''(x) + x^2S_n^{(3)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3\frac{x^{k-1}}{k!}$ et
$xS_n'(x) + 3x^2S_n''(x) + x^3S_n^{(3)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} k^3\frac{x^k}{k!}$.
D'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \mathrm{e}^x$ et donc
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n''(x) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(3)}(x) = \mathrm{e}^x$.
La série de terme général $\dfrac{n^3}{n!}x^n$ converge donc vers $\left(x^3+3x^2+x\right)\mathrm{e}^x$.
En outre, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge vers $\mathrm{e}^x$ donc la série de terme général $\dfrac{n^3+1}{n!}x^n$ converge vers $\left(x^3+3x^2+x+1\right)\mathrm{e}^x$.
En prenant $x=1$, on en déduit que la série de terme général $\dfrac{n^3+1}{n!}$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n!} = 6\mathrm{e}$.

**Exercice 8**
On s'intéresse à la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$$

On pose $u_0 = v_0 = 0$ et pour tout entier naturel non nul, $v_n = u_n - u_{n-1}$.

**1.** Soit
$n \in \mathbb{N}^*$ : $v_n = u_n - u_{n-1} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
On a donc $v_n \underset{\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{\infty}{=} -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Ainsi, $v_n \underset{\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

**2.** Au voisinage de $\infty$, le terme général $v_n$ est de signe constant et équivalent à $-\dfrac{1}{2n^2}$ qui à la constante multiplicative $-\dfrac{1}{2}$ près est le terme général d'une série de Riemann convergente : la série de terme général $v_n$ est donc convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n - u_0 = u_n$.

Donc la suite $(u_n)$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

**Exercice 9**

**1.** $u_n \underset{\infty}{=} -\dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ : $u_n$ est de signe constant au voisinage de $\infty$ et $u_n \underset{\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$ qui est au signe près le terme général d'une série de Riemann convergente : la série converge.

soit $n > 1$ : on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

$S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)$

Donc $S_n = \ln\left(\dfrac{1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (n-2) \times n \times (n-1) \times (n+1)}{2^2 \times 3^2 \times 4^2 \times \ldots \times (n-2)^2 \times (n-1)^2 \times n^2}\right)$.

Pour $n \geq 2$, on pose $P_n = \dfrac{1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (n-2) \times n \times (n-1) \times (n+1)}{2^2 \times 3^2 \times 4^2 \times \ldots \times (n-2)^2 \times (n-1)^2 \times n^2}$.

En observant ce produit aussi attentivement qu'un biologiste observerait des bactéries sous un microscope, on conjecture la propriété suivante : $\forall n \geq 2, P_n = \dfrac{n+1}{2n}$, conjecture qu'on se hâte de démontrer par récurrence :

**Initialisation :** $(n = 2)$

$P_2 = \dfrac{1 \times 3}{2^2} = \dfrac{2+1}{2 \times 2}$ donc la propriété est vraie au rang 2.

**Hérédité :**

Soit $n \geq 2$, on suppose que $P_n = \dfrac{n+1}{2n}$ et on veut montrer que $P_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

Or, $P_{n+1} = P_n \times \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$P_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} \times \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ donc la propriété est héréditaire.

**Conclusion :**

D'après le principe de récurrence, $\forall n \geq 2, P_n = \dfrac{n+1}{2n}$.

Pour tout $n \geq 2$, on a donc $S_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)$.

On a $n+1 \underset{\infty}{\sim} n$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ et comme la fonction ln est continue en $\dfrac{1}{2}$, on a :

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et la série de terme général $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} u_n = -\ln 2$.

**2.** Soit $n \geq 2$ : $R_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} u_k - \sum_{k=2}^{n} u_k = -\ln 2 - \ln(P_n) = -\ln(2 \times P_n)$

On a donc $R_n = -\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$.