TD Chapitre 1 : Séries numériques

Exercice 1
Déterminer la nature de la série de terme général a_n dans chaque cas :

1. $a_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$	**2.** $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$	**3.** $a_n = n \sin \dfrac{1}{n}$
4. $a_n = (-1)^n n^2$	**5.** $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$	**6.** $a_n = \dfrac{1}{n \sin^2 n}$
7. $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+n+1}$	**8.** $a_n = \sin \dfrac{1}{2^n}$	**9.** $a_n = \dfrac{(n+2)^{4/3}}{(n+1)\,(n+3)^{3/2}}$
10. $a_n = \dfrac{4^n - n}{5^n + 2n^4}$	**11.** $a_n = \dfrac{\ln n}{3n^4 - 2}$	**12.** $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$
13. $a_n = \ln\left(\dfrac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$	**14.** $a_n = \mathrm{e}^{-3n}$	

Exercice 2
Donner la nature de la série $\sum a_n$ dans les cas suivants :

1. **CCP**

a. $a_n = \dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$	**b.** $a_n = \dfrac{1}{2^n+2}$	**c.** $a_n = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2}$	**d.** $a_n = \dfrac{1}{n^2+\sin n}$
e. $a_n = \sqrt[n]{n}$	**f.** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$	**g.** $a_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$	**h.** $a_n = \cos n$

2. **Centrale**

a. $a_n = \binom{n}{2} a^{2n} \quad (a \in \mathbb{R})$	**b.** $a_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$	**c.** $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$	**d.** $a_n = \dfrac{1}{2^{nx}} \quad (x \in \mathbb{R})$
e. $a_n = \dfrac{1}{\ln^2 n}$	**f.** $a_n = \dfrac{a^n}{n+1} \quad (a \in \mathbb{R})$	**g.** $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}} a^n \quad (a > 0)$	

Exercice 3

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{X+2}$.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$, puis déterminer la somme de la série.

Exercice 4
Démontrer la convergence et déterminer la somme de la série $\sum a_n$ dans chacun des cas suivants :

1. $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ (pour $n \geqslant 2$)
2. $a_n = \dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n}$
3. $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)} - 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ (pour $n \geqslant 1$)
4. $a_n = \dfrac{4n-3}{n(n^2-4)}$ (pour $n \geqslant 3$)... *On pensera à décomposer le terme général.*

Exercice 5
Soit α un réel strictement positif. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{2}{n^\alpha}.$$

1. Soit S_n la somme partielle de la série de terme général u_n.
   Montrer que $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}\right) + \left(\sum_{k=3}^{n+1} \dfrac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}\right)$.
2. En déduire que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge et que la somme de cette série est $1 - \dfrac{1}{2^\alpha}$.
3. Soit R_n le reste d'indice n de la série.
   Montrer que $R_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\left(1 - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right)$.
   En déduire que $R_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$

Exercice 6
On considère la série de terme général $a_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En déduire que $a_n = (-1)^n \dfrac{\pi}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
3. Conclure quant à la convergence de la série $\sum a_n$.

Exercice 7

1. A l'aide de l'inégalité de Taylor Lagrange, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^3+1}{n!}$

Exercice 8

On s'intéresse à la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$$

On pose $u_0 = v_0 = 0$ et pour tout entier naturel non nul, $v_n = u_n - u_{n-1}$.

1. Déterminer un équivalent de v_n en l'infini.
2. En déduire que la série de terme général v_n converge, puis que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 9

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ pour $n \geqslant 2$ converge et calculer sa somme.
2. Justifier que $R_n \sim -\frac{1}{n}$.