

samedi 11 septembre 2021

Devoir surveillé n°1**Exercice 1 Exercice 2**

1. $\{G_1, \overline{G_1}\}$ constitue une partition de l'univers.

On utilise la formule des probabilités totales :

$$p_2 = p(G_2|G_1) \times p(G_1) + p(G_2|\overline{G_1}) \times p(\overline{G_1}).$$

$$p_2 = 0,8 \times 0,1 + 0,6 \times 0,9 = 0,62.$$

2. $p(\overline{G_1}|G_2) = \frac{p(\overline{G_1} \cap G_2)}{p(G_2)} = \frac{0,9 \times 0,6}{0,62} = 0,871$ arrondi au millième.

3. a. L'évènement "Le joueur gagne exactement deux parties parmi les 4" est constitué des évènements :

— $A_1 = G_1 \cap G_2 \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4}$ et $p(A_1) = 0,1 \times 0,8 \times 0,2 \times 0,4$

— $A_2 = G_1 \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap \overline{G_4}$ et $p(A_2) = 0,1 \times 0,2 \times 0,6 \times 0,2$

— $A_3 = G_1 \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap G_4$ et $p(A_3) = 0,1 \times 0,2 \times 0,4 \times 0,6$

— $A_4 = \overline{G_1} \cap G_2 \cap G_3 \cap \overline{G_4}$ et $p(A_4) = 0,9 \times 0,6 \times 0,8 \times 0,2$

— $A_5 = \overline{G_1} \cap G_2 \cap \overline{G_3} \cap G_4$ et $p(A_5) = 0,9 \times 0,6 \times 0,2 \times 0,6$

— $A_6 = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3 \cap G_4$ et $p(A_6) = 0,9 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,8$

Finalement, la probabilité de cet évènement est égale à la somme de ces probabilités, soit 0,3376.

- b. On calcule la probabilité de l'évènement contraire : "Le joueur perd les quatre parties".

Cette probabilité est égale à $0,9 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,0576$. La probabilité qu'il gagne au moins une partie sur les quatre est égale à $1 - 0,0576 = 0,9424$.

4. On procède de manière analogue à la question 1. :

$\{G_n, \overline{G_n}\}$ constitue une partition de l'univers.

On utilise la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(G_{n+1}|G_n) \times p(G_n) + p(G_{n+1}|\overline{G_n}) \times p(\overline{G_n}).$$

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,6(1 - p_n) = 0,2p_n + 0,6. \text{ soit } p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.$$

5. On raisonne par récurrence : on veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Initialisation : ($n = 1$).

$$\text{On a } \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{10} = p_1.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on suppose que $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ et on veut montrer que

$$p_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$$

D'après la question 4., on a $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

On utilise l'hypothèse de récurrence : $p_{n+1} = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \right) + \frac{3}{5}$.

$$p_{n+1} = \frac{3}{20} + \frac{3}{5} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$$

On a donc $p_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ et la propriété est héréditaire.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

6. $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{3}{4}$.

7. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n > 0$ donc $\frac{3}{4} - p_n > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} &\iff \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \iff \ln\left(\frac{13}{4}\right) + n \ln\left(\frac{1}{5}\right) < -7 \ln 10 \\ &\iff n > \frac{-7 \ln 10 - \ln\left(\frac{13}{4}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} = 10,7 \text{ arrondi au dixième.} \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \iff n > 11$.

Exercice 2

1. En posant $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$.

2. On montre par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $X_n = A^n X_0$:

Initialisation : (n=0)

Au rang $n = 0$, la propriété s'écrit $X_0 = A^0 X_0$ ce qui est vrai puisque $A^0 = Id$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X_n = A^n X_0$ et on veut montrer que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.

D'après la question précédente, on a $X_{n+1} = AX_n$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $X_{n+1} = A.(A^n.X_0) = A^{n+1} X_0$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.$$

3. On montre facilement que le déterminant de ces trois vecteurs est égal à -1 donc non nul : cette famille est donc une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$: c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4. On a facilement que $AV_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V_1$, que $AV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -V_2$ et que $AV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.V_3$.

On en déduit que la matrice D de l'application linéaire associée à A dans la base

$$\{V_1, V_2, V_3\} \text{ est } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$.

Initialisation : (n=0)

Au rang $n = 0$, la propriété s'écrit $A^0 = P.D^0.P^{-1}$ ce qui est vrai puisque $A^0 = D^0 = Id$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = P.D^n.P^{-1}$ et on veut montrer que $A^{n+1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$.

On a $A^{n+1} = A.A^n$ donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $A^{n+1} = A.(P.D^n.P^{-1})$.

D'après les formules usuelles de changement de base, on a de plus $A = P.D.P^{-1}$ donc $A^{n+1} = (P.D.P^{-1}).(P.D^n.P^{-1}) = P.D.(P^{-1}.P)D^n.P^{-1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}.$$

6. Pour tout entier naturel non nul n , on a $D^{2n-1} = \begin{pmatrix} (1)^{2n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$ et

$$D^{2n} = \begin{pmatrix} (1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D^2. \text{ Donc pour tout entier naturel non nul } n, \text{ on a } A^{2n-1} = A \text{ et } A^{2n} = A^2.$$

7. Dans cette question, on suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. D'après les questions précédentes, on a, pour tout entier naturel n non nul,

$$X_{2n} = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } u_{2n} = v_{2n} = w_{2n} = 1.$$

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$X_{2n-1} = A X_0 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } u_{2n-1} = v_{2n-1} = w_{2n-1} = 1.$$

On a donc $u_0 = w_0 = 2$ et $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = v_n = w_n = 1$.

b. Les trois suites sont donc constantes (égales à 1) à partir du rang 1.
Elle convergent donc toutes les trois vers 1.

8. On raisonne de façon analogue à la question précédente :

$$\text{On a, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } X_{2n} = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$u_{2n} = 1, v_{2n} = 2$ et $w_{2n} = 0$.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$X_{2n-1} = A X_0 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } u_{2n-1} = 1, v_{2n-1} = -2 \text{ et } w_{2n-1} = 0.$$

Ainsi, on a, pour tout entier naturel n : $u_n = 1, v_n = (-1)^n \cdot 2$ et $w_n = 0$.

On a donc (u_n) et (w_n) qui sont des suites constantes donc convergentes, et (v_n) n'est pas convergente (égale alternativement à -2 et 2).

Exercice 3**Partie A : Étude de la fonction f** **1. Sens de variation de f**

- a. Soit $x \in [0; +\infty[: f'(x) = 2x - e^{-\frac{1}{3}x}$ et $f''(x) = 2 + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$.

Ainsi, on a $f''(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$.

En outre, $f'(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ par somme.

On en déduit le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f'(x)$	-1	$+\infty$

- b. Sur $[0, +\infty[$, f' est continue, strictement croissante et admet des valeurs positives ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$) et négatives ($f'(0) = -1$) donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution, notée α .

$f'(0,43) < 0$ et $f'(0,44) > 0$ donc on a $0,43 < \alpha < 0,44$.

- c. D'après le tableau de variations de f' et ce qui précède, on a :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

2. Comportement asymptotique de f en $+\infty$

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par somme.

- b. $(f(x) - (x^2 - 3)) = 3e^{-\frac{1}{3}x} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x^2 - 3)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-\frac{1}{3}x} = 0$.

On en déduit que la parabole ($\mathcal{P}$) d'équation $y = x^2 - 3$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) en direction de $+\infty$, et que la courbe ($\mathcal{C}$) est au-dessus de la parabole ($\mathcal{P}$) sur $[0, +\infty[$.

3. Signe de f

- a. On a $f(0) = 0$, $f(\alpha) = -0,21$ arrondi à 10^{-2} et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par somme.

On en déduit le tableau de variations :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

- b. Sur $[0, \alpha]$, le maximum de f est 0, atteint pour $x = 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution : 0.

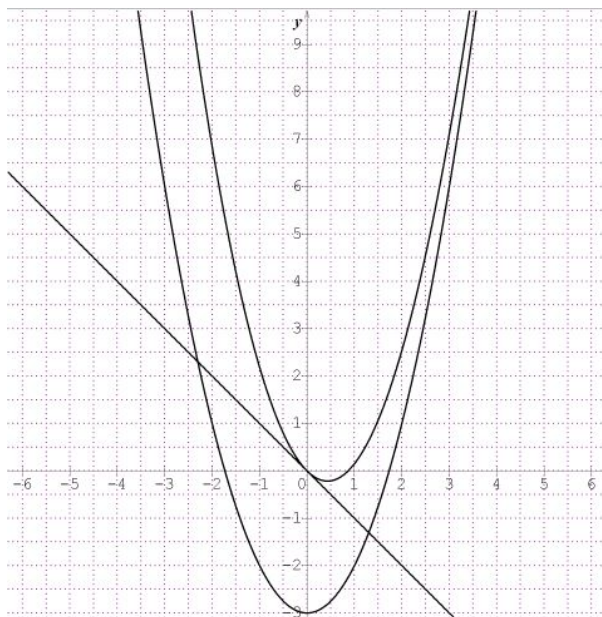
Sur $[\alpha, +\infty[$, f est continue, strictement croissante et admet des valeurs positives ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$) et négatives ($f'(\alpha) < 0$) donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée β .

$f(0,8) < 0$ et $f(0,9) > 0$ donc on a $0,8 < \beta < 0,9$.

- c. D'après ce qui précède, on a :

x	0	β	$+\infty$
$f(x)$	0	-	+

4. On a $f'(0) = -1$ et $f(0) = 0$ donc on montre facilement que la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -x$.



5. a.
$$I(\lambda) = \int_0^\lambda |f(x) - (x^2 - 3)| dx = \int_0^\lambda \left| 3e^{-\frac{1}{3}x} \right| dx = \left[-9e^{-\frac{1}{3}x} \right]_0^\lambda = 9 \left(-e^{-\frac{\lambda}{3}} + 1 \right).$$

- b. Ce nombre représente, en unité d'aires, l'aire du domaine plan compris entre la courbe $(\mathcal{C})$, la parabole $(\mathcal{P})$, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.
- c. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = 9$ par somme.

Partie B : Approximation de la solution β de l'équation $f(x) = 0$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [0, 8; 0, 9]$ par

$$g(x) = x - f(x) = x + 3 - x^2 - 3e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Ainsi la solution β de l'équation $f(x) = 0$ est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

1. Étude de la fonction g' .

- a. Soit $x \in [0, 8; 0, 9]$: $g'(x) = 1 - f'(x)$ et $g''(x) = -f''(x) < 0$ sur $[0, 8; 0, 9]$.
 g' est donc strictement décroissante sur $[0, 8; 0, 9]$, $g'(0, 8) = 0,17$ arrondi à 10^{-2} et $g'(0, 9) = -0,06$ arrondi à 10^{-2} .
- b. Sur $[0, 8; 0, 9]$, g' est continue, strictement décroissante et admet des valeurs positives ($g'(0, 8) > 0$) et négatives ($g'(0, 9) < 0$) donc l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution, notée γ .
 g' est strictement décroissante sur $[\gamma; 0, 9]$ donc le maximum de $|g'|$ est atteint pour $x = 0, 9$, et $g'(0, 9) \leq 10^{-2}$.
 g' est strictement décroissante sur $[0, 8; \gamma]$ donc le maximum de $|g'|$ est atteint pour $x = 0, 8$, et $g'(0, 8) \leq \frac{1}{5}$. Finalement, on a donc : $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{5}$.

2. Étude de la fonction g .

- a. En utilisant ce qui précède :

x	0,8	γ	0,9
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g(0,8) \nearrow g(\gamma) \searrow g(0,9)$		

- b.** $g(0,8) = 0,862$ arrondi à 10^{-3} et $g(0,9) = 0,868$ arrondi à 10^{-3} .
La fonction g est continue sur $[\gamma; 0,9]$, dérivable sur $] \gamma; 0,9[$ et d'après la question 1.b, on a $g'(x) \leq 6.10^{-3}$ sur $] \gamma; 0,9[$ donc, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|g(0,9) - g(\gamma)| \leq 6.10^{-3}.$$

D'après le tableau de variations de g , on a $g(\gamma) > g(0,9)$ donc
 $g(\gamma) < g(0,9) + 6.10^{-3} < 0,871$ donc $g(\gamma) \in I$.

- c.** D'après le tableau de variations de g , on a, pour tout x appartenant à I ,
 $g(x) \in [g(0,8); g(\gamma)] \subset I$ puisque $0,8 < g(0,8) < 0,9$ et $0,8 < g(\gamma) < 0,9$.
On a donc, pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$.
- d.** La fonction g est continue sur I , dérivable sur I et d'après la question 1.b, on a
 $g'(x) \leq \frac{1}{5}$ sur I donc, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a, pour
tout x de I , et comme $g(\beta) = \beta$:

$$|g(x) - \beta| \leq \frac{1}{5} |x - \beta|$$

3. Étude d'une approximation de β .

Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 0,8$.

- a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et (P_n) la propriété :

$$u_n \in I$$

Initialisation : (P_0) est vraie car $u_0 = 0,8$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose (P_k) vraie (i.e. $u_k \in I$) et on veut montrer que (P_{k+1}) est vraie (i.e. $u_{k+1} \in I$).

D'après 2.c, comme $u_k \in I$ alors $g(u_k) \in I$ soit $u_{k+1} \in I$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
Soit $n \in \mathbb{N}$: on applique la question 1.d. à $x = u_n \in I$ et on a immédiatement :

$$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{5} |u_n - \beta|.$$

- b.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et (P_n) la propriété :

$$|u_n - \beta| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^n}$$

Initialisation : (P_0) est vraie car $|u_0 - \beta| < (0,9 - 0,8)$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose (P_k) vraie (i.e. $|u_k - \beta| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^k}$) et on veut
montrer que (P_{k+1}) est vraie (i.e. $|u_{k+1} - \beta| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^{k+1}}$).

En utilisant la question précédente, et comme $u_{k+1} \in I$, on a

$|u_{k+1} - \beta| \leq \frac{1}{5} |u_k - \beta|$. Or, $|u_k - \beta| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^n}$ donc $|u_{k+1} - \beta| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^{k+1}}$: (P_{k+1}) est vraie.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \beta| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^n}$$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \beta$.