samedi 11 septembre 2021

Devoir surveillé n°1

Exercice 1

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :
- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :
- G_n l'évènement "le joueur gagne la n-ième partie.
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Dans cette question, on suppose que le joueur effectue quatre parties.
   a. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux.
   b. Calculer la probabilité qu'il en gagne au moins une.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a
$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.$$
5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a
$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$
6. Déterminer la limite de la suite (p_n).
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a t-on $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Exercice 2 On souhaite déterminer les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n, on ait :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & -3u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} & = & -4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} & = & -2u_n + v_n + 2w_n \end{array}\right. .$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel n, on ait $X_{n+1} = AX_n$.

2. Exprimer X_n en fonction de n, A et X_0.

3. Soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que la famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Calculer AV_1, AV_2 et AV_3.
En déduire la matrice D de l'application linéaire associée à A dans la base $\{V_1, V_2, V_3\}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Exprimer A^n en fonction de n, P, D et P^{-1}.

6. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a $A^{2n-1} = A$ et $A^{2n} = A^2$.

7. Dans cette question, on suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Déduire de ce qui précède les expressions de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir d'un certain rang (à préciser).
Quelles sont les limites de ces suites ?

8. Dans cette question, on suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer en fonction de la parité de n les expressions de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Préciser lesquelles n'ont pas de limite.

Exercice 3
l'objet de la partie A est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 3 + 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
L'objet de la partie B est d'étudier une méthode d'approximation de l'unique solution non nulle β de l'équation $f(x) = 0$, à l'aide d'une suite.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Sens de variation de f
   - **a.** Déterminer le tableau de variation de f' sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$.
   - **b.** Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution, notée α dont on donnera un encadrement à 10^{-2}.
   - **c.** En déduire le signe de f' sur $[0;\ +\infty[$.
2. Comportement asymptotique de f en $+\infty$
   - **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   - **b.** Déterminer le signe de $\left(f(x) - (x^2 - 3)\right)$ et sa limite en $+\infty$.
     Interpréter graphiquement ce résultat (on note $(\mathscr{P})$ la courbe d'équation $y = x^2 - 3$).
3. Signe de f
   - **a.** Dresser le tableau de variation de f.
   - **b.** Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution non nulle β et que celle-ci appartient à $[\alpha;\ +\infty[$.
     Déterminer un encadrement de β à 10^{-1}.
   - **c.** Étudier le signe de f sur $[0; +\infty[$.
4. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$. On précisera la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5.
   - **a.** Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} \left|f(x) - (x^2 - 3)\right| \mathrm{d}x$ où λ désigne un nombre réel strictement positif.
   - **b.** Interpréter graphiquement de résultat.
   - **c.** Déterminer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Partie B : Approximation de la solution β de l'équation $f(x) = 0$
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [0,8; 0,9]$ par

$$g(x) = x - f(x) = x + 3 - x^2 - 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}.$$

Ainsi la solution β de l'équation $f(x) = 0$ est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

1. Étude de la fonction g'.
   - **a.** Calculer $g'(x)$.
     Étudier le sens de variation de g' (on pourra utiliser les résultats de A.1.b).
   - **b.** Montrer qu'il existe un unique réel, noté γ de I solution de l'équation $g'(x) = 0$.
     Montrer que pour tout $x \in [\gamma; 0,9]$, $|g'(x)| \leq 6.10^{-2}$, puis que pour tout $x \in I$, $\left|g'(x)\right| \leq \dfrac{1}{5}$.

2. Étude de la fonction g.

a. Étudier les variations de g sur I.

b. Calculer $g(0,8)$ et $g(0,9)$.
En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver que

$$\left|g(0,9) - g(\gamma)\right| \leq 6.10^{-3}.$$

En déduire que $g(\gamma) \in I$.

c. Prouver que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$.

d. Montrer que pour $x \in I$, $\left|g(x) - \beta\right| \leq \dfrac{1}{5}\left|x - \beta\right|$.

3. Étude d'une approximation de β.
Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 0,8$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \beta\right| \leq \dfrac{1}{5}\left|u_n - \beta\right|$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ,$\left|u_n - \beta\right| \leq \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{5^n}$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).