TD Chapitre 3 : Séries entières - CORRECTION

Exercice 1

a. Soit $z \neq 0$: on pose $b_n = 1.z^n$ et on a $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = |z|$.

D'après le théorème de d'Alembert :

— si $|z| < 1$ alors la série converge;

— si $|z| > 1$ alors la série diverge.

On en déduit que $R = 1$.

b. De même, on a $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{n+1}{n}|z|$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = |z|$. D'après le critère de d'Alembert :

— si $|z| < 1$ alors la série converge;

— si $|z| > 1$ alors la série diverge.

On en déduit que $R = 1$.

c. De même, on a $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{n}{n+1}|z|$ et $R = 1$.

d. De même, on a $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}|z|$ et $R = 1$.

e. De même, on a $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{(n+1)!}{n!}|z|$.

Ainsi, $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = (n+1)|z|$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = +\infty$.

Donc d'après le critère de d'Alembert, la série diverge quelle que soit la valeur de z et $R = 0$.

e. Soit $n \neq 0$: $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left[n^2\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

On a $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{\exp\left[(n+1)^2\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]}{\exp\left[n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]} = \exp\left[(n+1)^2\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) - n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$

$(n+1)^2\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) - n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=}$

$(n+1)^2\left(-\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)\right) - n^2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

$= -(n+1) - \dfrac{1}{2} - n + \dfrac{1}{2} + o(1)$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^2\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) - n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right] = -1$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \mathrm{e}^{-1}|z|$ par continuité de la fonction exponentielle en -1. D'après le critère de d'Alembert :

— si $|z|\mathrm{e}^{-1} < 1$ alors la série converge;

— si $|z|\mathrm{e}^{-1} > 1$ alors la série diverge.

On en déduit que $R = \mathrm{e}$.

Exercice 2 (version CCP)

1. On procède comme habituellement et on trouve $R = 1$.
2. On montre facilement que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
   Les séries entières de terme général $\dfrac{1}{n(n-1)}x^n$, $\dfrac{1}{n}x^n$ et $\dfrac{1}{n-1}x^n$ ont pour rayon de convergence 1, et comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, on a , pour tout $x \in]-1,1[$:
   $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$.
   On sait que pour $x \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
   Ainsi, d'après le théorème d'intégration des séries entières, on a $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   Or, la primitive de cette fonction sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0 est $-\ln(1-x)$.
   On a donc $\displaystyle -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
   En effectuant un changement d'indice, on a donc :
   $\displaystyle -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et donc $\displaystyle -\ln(1-x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, soit :
   $\displaystyle -\ln(1-x) - x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
   En outre, en multipliant le deux membres de l'égalité $\displaystyle -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ par x, on a
   $\displaystyle -x\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+1}$ et en effectuant un changement d'indice :
   $\displaystyle -x\ln(1-x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1}$.
   Finalement :
   $$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = (1-x)\ln(1-x) + x$$
3. On a $\dfrac{1}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente, et la fonction f est prolongeable par continuité à gauche en 1.
   En outre, on a $\displaystyle\lim_{u\to 0} u\ln u = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ et donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

   $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est absolument convergente (donc convergente), et la fonction f est prolongeable par continuité à droite en -1.
   En outre, $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = 2\ln 2 - 1$ et donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$.

Exercice 2 version centrale

1. On procède comme habituellement et on trouve $R=1$.
2. On montre facilement que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a
$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
Les séries entières de terme général $\frac{1}{n(n+1)}x^n$, $\frac{1}{n}x^n$ et $\frac{1}{n+1}x^n$ ont pour rayon de convergence 1, et comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, on a , pour tout $x \in]-1,1[$:
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^n$.
On sait que pour $x \in]-1,1[$, on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
Ainsi, d'après le théorème d'intégration des séries entières, on a $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Or, la primitive de cette fonction sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0 est $-\ln(1-x)$.
On a donc $-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
En effectuant un changement d'indice, on a donc :
$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$
En supposant $x \neq 0$, et en divisant les deux membres de l'égalité $-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ par x on a :
$-\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ donc $-\frac{\ln(1-x)}{x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$, et donc :
$-\frac{\ln(1-x)}{x} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$.
On a donc, pour $x \neq 0$:
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^n = -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1$ et comme $f(0)=0$:
$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + 1 \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
3. On a $\frac{1}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, et la fonction f est prolongeable par continuité à gauche en 1.
En outre, on a $\lim_{u\to 0} u \ln u = 0$ donc $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

$\left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la

série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ est absolument convergente (donc convergente), et la fonction f est prolongeable par continuité à droite en -1.
En outre, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -2\ln 2 + 1$ et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = -2\ln 2 + 1$.

Exercice 3
On montre facilement que le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$.
Pour $x \in]-1,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
On a donc $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$, soit : $\frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et donc :

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$$

Pour $x \in]-1,1[$, on a $\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1}$, soit : $\frac{-x-1}{(x-1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1}$ et donc :

$$\frac{-x^2-x}{(x-1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$$

Comme toutes ces séries entières ont le même rayon de convergence, on a :
$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+2n-1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+2n-1)x^n = \frac{-x^2-x}{(x-1)^3} + 2\frac{x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+2n-1)x^n = \frac{2x^2-5x+1}{(x-1)^3}$$

Exercice 4
On montre facilement que le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.
On a donc $(\mathrm{e}^x)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^{n-1}$, soit : $\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^{n-1}$ et donc :

$$x\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $(x\mathrm{e}^x)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^{n-1}$, soit : $(x+1)\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^{n-1}$ et donc :

$$\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$$

Comme toutes ces séries entières ont le même rayon de convergence, on a :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n-1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n-1}{n!} x^n = \left(x^2+x\right) \mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n-1}{n!} x^n = \left(x^2+3x+1\right) \mathrm{e}^x$$

Exercice 5

Soit $z \neq 0$: on pose $b_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} z^n$.

$\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{\sqrt{n+1}\ln(n+1)}{(n+1)^2+1} \times \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n}\ln n} |z|$

On sait que $\sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$, $\ln n \underset{+\infty}{\ln} (n+1)$ et $(n^2+1) \underset{+\infty}{\sim} \left((n+1)^2+1\right)$

On a donc $\displaystyle\lim_{n+\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = |z|$ et en utilisant le critère de d'Alembert, on montre que $R = 1$.

Soit z de module 1, on a $\left|\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} z^n\right| = \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$.

On sait que $\ln n \underset{+\infty}{=} o\left(n^{1/4}\right)$ donc, pour n assez grand, $\ln n < n^{1/4}$ et donc $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} < \dfrac{n^{3/4}}{n^2+1}$

De plus, $\dfrac{n^{3/4}}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{5/4}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Ainsi la série de terme général $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} z^n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 6

$\sin^2 x \cos x = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right) = -\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$

$= \dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) = \dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \dfrac{1}{8}\left(2\cos 3x - 2\cos x\right)$

Donc $\sin^2 x \cos x = \dfrac{1}{4}\left(\cos 3x - \cos x\right)$.

La fonction $\cos x$ admet un développement en série entière de rayon de convergence égal à $+\infty$, il en est de même pour la fonction $c\cos 3x$ donc le rayon de convergence du développement en série entière de f sera $+\infty$.

En outre, on a $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(3x)^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(9^n-1\right)}{4\times(2n)!} x^{2n}$$

Exercice 7

f est définie sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$, on a $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.

Les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ sont développables en série entière avec un rayon de convergence égal à 1.

On en déduit que f est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1.

$\forall x \in]-1,1[, \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$
Trève de mathématiques, retombons quelques instants en enfance et jouons au domino : à l'instar de ces petites briques chancelantes, un terme sur deux de cette somme va tomber (si n est impair, $(-1)^n = -1$ et les termes en x^{n+1} s'annulent.
De cette somme ne subsiste donc que les termes correspondant à des valeur de n paires.
Ainsi, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Pour $x = 1$, on a la série numérique de terme général $\frac{1}{4n+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$ qui diverge (série harmonique).

Pour $x = -1$, on a la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{4n+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{4n}$ qui converge (il convient de se remémorer le contre-exemple gracieusement fourni par votre prof de maths préféré).

Exercice 8

f est définie sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\bigcup]1, +\infty[$ et sur ces intervalles, $f(x) = \ln(1-2x) + \ln(1-x)$.

Ces deux fonctions sont développables en série entière avec des rayons de convergence égaux respectivement à 1 et $\frac{1}{2}$.

f est donc développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ qui est bien inclus dans son domaine de définition.

$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $\ln(1-2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$ donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2^{n+1}+1\right) x^{n+1}}{n+1}$$

— Pour $x = -\frac{1}{2}$, on a la série numérique de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

Or, $\left|\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\right| \leq \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

De plus, la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ est convergente.

Donc la série converge pour $x = -\frac{1}{2}$.

— Pour $x = \frac{1}{2}$, on a la série numérique de terme général $\frac{1}{n+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$ qui diverge car la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ diverge (série harmonique)

Donc la série diverge pour $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 9

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^x (\cos x + \mathrm{i} \sin x)$ donc $f(x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)$.
2. $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, (1+\mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4}$ et donc $\mathrm{Re}\left((1+\mathrm{i})^n\right) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!} x^n$ et donc :

   $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \cos(n\pi/4)}{n!} x^n$ et le rayon de convergence de cette série entière est infini.

Exercice 10

On sait que pour tout x réel, on a $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ et donc, pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n}$$

Cette fonction est continue en 0 et comme elle est développable en série entière avec un rayon de convergence infini, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

— Pour $n=0$, on a $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

— Soit $k\geq 1$: $\forall x\neq 0$,on a $f^{(k)}(x)=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)(2n-1)\dots(2n-k+1)}{(2n+2)!}x^{2n-k}$

$f^{(k)}(x)=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(2n+2)!(2n-k)!}x^{2n-k}$

f étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc en 0, on a $f^{(k)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}f^{(k)}(x)$.

Ainsi :

— Si k est impair, la somme infinie est factorisable par x et $f^{(k)}(0)=0$

— Si k est pair, ne subsiste de cette somme que le premier terme et $f^{(k)}(0)=\dfrac{(-1)^{k/2}}{(k+2)(k+1)}$

Exercice 11

On sait que pour $x\in]-1;1[$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-1/2}$

Or, $\left(1-x^2\right)^{-1/2}=1+\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\dots\times\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!}x^{2n}\right)$

$=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\times 3\times 5\times\dots\times(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par $2\times 4\times 6\times\dots\times 2n=2^n n!$:

$\left(1-x^2\right)^{-1/2}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$

La fonction Arcsin est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0, donc :

$\forall x\in]-1,1[,\text{Arcsin } x=x+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2}x^{2n+1}$

Exercice 12

1. $\forall x\in]-1,1[, f'(x)=2\dfrac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x\in]-1,1[,f''(x)=2\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times\sqrt{1-x^2}-\text{Arcsin } x\times\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right)$

$f''(x)=2\left(\dfrac{1+\frac{x\text{ Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right)$

$\left(1-x^2\right)f''(x)-xf'(x)=2+\dfrac{2x\text{ Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}-x\times 2\dfrac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}=2.$

En outre, $f(0)=f'(0)=0$ donc f est l'unique solution du problème de Cauchy proposé.

2. Supposons qu'il existe une série entière $y(x)$ solution de ce problème de Cauchy, de rayon de convergence $R > 0$.

Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Comme $y(0) = y'(0) = 0$, on a $a_0 = a_1 = 0$ et $y(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$

En outre, alors $y'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

$$\left(1-x^2\right) y'' - xy' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n$$

$$\left(1-x^2\right) y'' - xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n.$$

$$\left(1-x^2\right) y'' - xy' = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - n a_n) x^n$$

$$\left(1-x^2\right) y'' - xy' = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} - n^2 a_n\right) x^n$$

Ainsi, y est solution du problème de Cauchy si et seulement si : $\begin{cases} a_0 = a_1 = a_3 = 0 \\ a_2 = 1 \\ \forall n \geq 2, a_{n+2} = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)} a_n \end{cases}$

3. On a $a_1 = 0$ et comme $a_3 = 0$, on montre facilement par récurrence que $\forall n \geq 0, a_{2n+1} = 0$.
On s'intéresse maintenant aux valeurs paires de n. On pose donc $n = 2p$ pour $p \geq 1$ puisque $a_0 = 0$.
La relation de récurrence établie à la question précédente devient
$a_{2p+2} = \dfrac{(2p)^2}{(2p+1)(2p+2)} a_{2p}$.
La réponse nous est fournie dans l'énoncé (!), on cherche donc à prouver par récurrence la propriété suivante :

$$\forall p \geq 1, a_{2p} = \frac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p)!}$$

Initialisation :

Pour $p = 1$, la propriété s'écrit $a_2 = \dfrac{2^1 \times 0!}{2!} = 1$,ce qui est vrai.

Hérédité :

Soit $p \geq 1$, on suppose que $a_{2p} = \dfrac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p)!}$, et on veut montrer que $a_{2p+1} = \dfrac{2^{2p+1}\left((p)!\right)^2}{(2p+2)!}$.

On sait que $a_{2p+2} = \dfrac{(2p)^2}{(2p+1)(2p+2)} a_{2p}$ donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$a_{2p+2} = \frac{(2p)^2}{(2p+1)(2p+2)} \times \frac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p)!} = \frac{2^2 \times p^2 \times 2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p+2)(2p+1)(2p)!} = \frac{2^{2p+1}\left((p)!\right)^2}{(2p+2)!}.$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion :
La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence :

$$\forall p \geq 1, a_{2p} = \frac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p)!}$$

On montre facilement que pour $x \neq 0$ et $p \geq 1$, on a
$\dfrac{a_{2p+2}x^{2p+2}}{a_{2p}x^{2p}} = \dfrac{4p^2}{(2p+2)(2p+1)}x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$.
Ainsi, le critère de d'Alembert permet d'affirmer que le rayon de convergence de la série entière trouvée précédemment est égal à 1.

Finalement : $\forall x \in]-1;1[, f(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p)!} x^{2p}$

Exercice 13 (*)

1. L'équation caractéristique associée à l'équation linéaire à coefficients constants définissant w_n est $X^2 - X - 1 = 0$.
   Les solutions de cette équation sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1}{\varphi}$.
   On sait qu'il existe donc deux constantes réelles A et B telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = A\varphi^n + B\psi^n$$
   On a $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$ donc A et B sont solution du système : $\begin{cases} A+B &= 0 \\ A-B &= \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$
   On a donc $A = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $B = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\varphi^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\psi^n$$

2. Pour $x \neq 0$, on pose $a_n = w_n x^n$, on a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{w_{n+1}}{w_n} \times |x|$.
   Or, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \psi^n = 0$ et donc $w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{5}}{5}\varphi^n$.
   Ainsi, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \varphi$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \varphi|x|$.
   D'après le critère de d'Alembert :
   — Si $\varphi|x| < 1$ alors la série converge
   — Si $\varphi|x| > 1$ alors la série diverge
   Le rayon de convergence de cette série entière est donc égal à $\dfrac{1}{\varphi}$.

3. Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{\varphi};\dfrac{1}{\varphi}\right[$, et comme toutes ces séries entières ont le même rayon de convergence :
   $\displaystyle\left(1-x-x^2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+2}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} w_{n-2} x^n$$
$$= w_0 + w_1 x - w_0 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (w_n - w_{n-1} - w_{n-2}) x^n.$$
Or, $w_0 = 0, w_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 2$, $w_n - w_{n-1} - w_{n-2} = 0$. On a donc :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{\varphi}; \frac{1}{\varphi} \right[, \left(1 - x - x^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x.$$