TD Chapitre 3 : Séries entières

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général $a_n x^n$:

a. $a_n = 1$	**b.** $a_n = n$	**c.** $a_n = \dfrac{1}{n}$
d. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$	**e.** $a_n = n!$	**f.** $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice 2 (version CCP)
On pose $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ pour tout $n \geq 2$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.

2. Pour $x \in]-R; R[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$.
Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite en $-R$? A gauche en R ?

Exercice 2 (version Centrale)
On pose $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 2$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.

2. Pour $x \in]-R; R[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$.
Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite en $-R$? A gauche en R ?

Exercice 3
Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 2n - 1)x^n$.

Exercice 4
Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{n!} x^n$.

Exercice 5
On considère la série entière $\sum \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} z^n$.
Déterminer son rayon de convergence et montrer qu'il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude.

Exercice 6
Linéariser $f(x) = \sin^2 x \cos x$ et en déduire un développement en série entière de f.
On précisera le rayon de convergence.

Exercice 7
Déterminer un développement en série entière en 0 de la fonction f telle que $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
On précisera le rayon de convergence et s'il y a convergence sur les bords ou non.

Exercice 8
Déterminer un développement en série entière en 0 de la fonction f telle que
$f(x) = \ln\left(1-3x+2x^2\right)$.
On précisera le rayon de convergence et s'il y a convergence sur les bords ou non.

Exercice 9
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Re}\left((1+\mathrm{i})^n\right) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.
3. En déduire un développement en série entière de f, et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 10
Montrer que la fonction f définie par : $\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si}\, x = 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout entier n, déterminer $f^{(n)}(0)$.

Exercice 11
Déterminer un développement en série entière en 0 de la fonction f telle que $f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x$.
On précisera le rayon de convergence et s'il y a convergence sur les bords ou non.

Exercice 12

1. Vérifier que la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = (\mathrm{Arcsin}\, x)^2$ est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \left(1-x^2\right) y'' - x y' & = & 2 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{cases}.$$

2. Chercher une solution de ce problème de Cauchy sous la forme d'une série entière dont on déterminera le rayon de convergence.
3. En déduire que : $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p)!} x^{2p}$

Exercice 13 (*)

On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, w_n = w_{n-1} + w_{n-2} \end{cases}$

1. Exprimer w_n en fonction de n.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum w_n x^n$.

3. Montrer que, pour des valeurs du réel x convenables, on a $\left(1 - x - x^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x$.