

Chapitre 3 : Séries entières

1 Définitions et premier résultats

1.1 Définition

Définition 1 : série entière

On appelle série entière de la variable complexe z toute série de terme général $a_n z^n$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$.

Exemple 1

1. $\sum z^n$ est une série entière.

On sait qu'elle converge si et seulement si $|z| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

2. $\sum n x^n$ est une série entière.

On sait qu'elle converge si $x \in]-1; 1[$ et dans ce cas $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

1.2 Rayon de convergence d'une série entière

Propriété 1 : lemme d'Abel

Soit (a_n) une suite de nombres complexes.

Soit r un nombre réel strictement positif et supposons que $(a_n r^n)$ est une suite bornée.

Alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < r$, $\sum a_n z^n$ converge.

Définition 2 : rayon de convergence

Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup_{\mathbb{R}} \{ r \geq 0 : (a_n r^n) \text{ est bornée} \}$$

C'est la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que $(a_n r^n)$ est bornée (cette borne pouvant être infinie).

Propriété 2 : caractérisation du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R est l'unique $R \in \overline{\mathbb{R}_+}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- Si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > R$ alors la suite $a_n z^n$ n'est pas bornée et la série $\sum a_n z^n$ est donc grossièrement divergente.

Remarque

On ne connaît pas la nature de la série entière $\sum a_n z^n$ pour $|z| = R$.

Exemples 2

Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum 2^n x^n$
2. $\sum n^2 z^n$
3. $\sum \frac{z^n}{(2+i)^n}$

Remarque

La règle de d'Alembert sur les séries est un outil très utile pour trouver le rayon de convergence d'une série entière.

Exemples 3

1. **KHOLLE** On considère la série entière $\sum \frac{n!}{n^n} z^{2n}$.
 - a. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $u_n = \frac{n!}{n^n} z^{2n}$. Déterminer la limite de $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$.
 - b. En utilisant la règle de d'Alembert, en déduire que le rayon de convergence de la série entière est $\sqrt{e}$.
2. **KHOLLE** Donner les rayons de convergence des séries entières $\sum n! z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$.
3. **KHOLLE** Soit $\frac{P(n)}{Q(n)}$ une fraction rationnelle en n . Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$ vaut 1.
4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :
 - a. $\sum a_n^2 z^n$
 - b. $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$
 - c. $\sum \frac{a_n n!}{n^n} z^n$

Propriété 3 : rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1. Si z_0 est un complexe tel que $\sum a_n z_0^n$ converge alors $|z_0| \leq R$.
2. Si z_0 est un complexe tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge alors $|z_0| \geq R$.

Exemple 4

On considère la série entière $\sum_{n>0} \frac{z^n}{n}$.

Rappeler la nature des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière.

1.3 Quelques outils pour l'étude des séries entières.

Propriété 4 : inégalités, équivalents et rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs $R > 0$ et $R' > 0$.

1. S'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R \geq R'$.
2. Si $|a_n|$ et $|b_n|$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ alors $R = R'$.

Exemples 5

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \arctan(n) z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\ln n}{n^2} z^n$.
3. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{\cos n} z^n$ est égal à 1.

Propriété 5 : opérations sur les séries entières

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors la série entière $\sum (\lambda a_n) z^n$ a pour rayon de convergence R si $\lambda \neq 0$ et $+\infty$ si $\lambda = 0$.
2. Les trois séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ et $\sum_{n \geq 1} n \cdot a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

Définition 3 : disque de convergence et somme de la série entière

1. Le disque ouvert $\mathcal{D}(0; R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ est appelé le disque de convergence de la série entière.
2. Si la variable est réelle, l'intervalle ouvert $] -R; R[$ est appelé l'intervalle de convergence de la série entière.
3. Le cercle $\mathcal{C}(0; R)$ est appelé le cercle d'incertitude de la série entière.
4. L'application $S : \begin{cases} \mathcal{D}(0; R) \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$ est appelée la somme de la série entière.

2 Somme d'une série entière d'une variable réelle

Propriété 6 : continuité

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme.

1. La fonction S est continue sur l'intervalle de convergence $] - R; R[$.
2. Si la série $\sum a_n R^n$ converge alors S est prolongeable par continuité à gauche en R en posant $S(R) = \sum a_n R^n$.
3. Si la série $\sum a_n (-R)^n$ converge alors S est prolongeable par continuité à droite en $-R$ en posant $S(-R) = \sum a_n (-R)^n$.

Propriété 7 : dérivabilité

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme.

1. S est de classe C^∞ sur $] - R; R[$
2. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in] - R; R[\quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$

Remarques

1. Pour dériver la somme d'une série entière, il suffit donc de dériver terme à terme.
2. En ré-indexant, on a $S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$
3. $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Propriété 8 : unicité des coefficients

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs $R > 0$ et $R' > 0$.

S'il existe $r < \inf\{R; R'\}$ tel que $\forall x \in] - r; r[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

Propriété 9 : primitives d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme.

$$\forall x \in] - R; R[, \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Remarque

Pour intégrer la somme d'une série entière, il suffit donc d'intégrer terme à terme.

Exemples 6 **KHOLLE**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$. Donner l'expression de sa somme et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^2 x^n$. Donner l'expression de sa somme et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$. Donner l'expression de sa somme et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n}$.

3 Développement en série entière**Définition 4 : fonction développable en série entière**

Soit f une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$.

On dit que la fonction f est développable en série entière autour de 0 s'il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels que :

$$\begin{cases}]-r; r[\subset I \\ \forall x \in]-r; r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$$

Exemples 7 **KHOLLE**

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière autour de 0 et déterminer son développement.
2. Même question avec $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. Même question avec $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
4. Même question avec $x \mapsto \ln(1-x)$.

Intervalle	Développement
$] -1; 1[$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
$] -1; 1[$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$] -1; 1[$	$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$
$] -1; 1[$	$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$
$] -1; 1[$	$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$] -1; 1[$	$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\mathbb{R}$	$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\mathbb{R}$	$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Exemples 8

1. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$.
 - a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.
 - b. Montrer que pour tout x réel, on a $e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$.
 - c. En déduire que pour x réel, on a $xe^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n$.
 - d. En dérivant l'expression précédente, en déduire que pour x réel, $(1+x)e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$ et en déduire enfin une expression simple de la somme de la série entière.
2. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$.
 - a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
 - b. Pour $x \in]-R; R[$, montrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
 - c. En déduire une expression simple de la somme de la série entière.
 - d. Justifier que les séries numériques $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ convergent et calculer leur somme.
3. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.
 - a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
 - b. Montrer que pour $x \in]-R; R[$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = x \frac{1+x}{(1-x)^3}$.

4. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 3n + 1) x^n$.
- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
 - Vérifier que $n^2 + 3n + 1 = (n + 1)(n + 2) - 1$.
 - En déduire que pour $x \in]-R; R[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 3n + 1) x^n = -\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(2)}$ et en déduire la somme de la série entière.

Remarque :

Cette méthode peut se généraliser de la façon suivante :

Pour calculer la somme d'une série entière de terme général $P(n)x^n$, après avoir montré que son rayon de convergence est égal à 1, on écrit $P(n)$ sous la forme :

$P(n) = \alpha_0 + \alpha_1(n + 1) + \alpha_2(n + 1)(n + 2) + \dots + \alpha_p(n + 1)(n + 2)\dots(n + p)$ où $\text{Deg } P = p$.

On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n = \alpha_0 \left(\frac{1}{1-x}\right) + \alpha_1 \left(\frac{1}{1-x}\right)' + \alpha_2 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(2)} + \dots + \alpha_p \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p)}$

5. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!} x^n$.
- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
 - Vérifier que $n^2 + 3n + 1 = 1 + 4n + n(n - 1)$.
 - En déduire que pour $x \in]-R; R[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!} x^n = (1 + 4x + x^2) e^x$.

Remarque :

Cette méthode peut se généraliser de la façon suivante :

Pour calculer la somme d'une série entière de terme général $\frac{P(n)}{n!} x^n$, après avoir montré que son rayon de convergence est infini, on écrit $P(n)$ sous la forme :

$P(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n(n - 1) + \dots + \alpha_p n(n - 1)\dots(n - p + 1)$ où $\text{Deg } P = p$.

On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_p x^p) e^x$.

4 Exponentielle complexe

Rappel

L'an passé, nous avons défini l'exponentielle d'un complexe z par

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Propriété 10 : exponentielle complexe

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, et pour tout z complexe, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

5 Equation différentielle linéaire et développement en série entière

Méthode

1. On trouve un problème de Cauchy, liée à une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, dont la fonction est l'unique solution.
2. On recherche si ce problème de Cauchy admet une solution qui est la somme d'une série entière.
3. On étudie le rayon de convergence R de la série entière obtenue : si $R \neq 0$, l'unicité de la solution au problème de Cauchy sur $] - R; R[$ nous assure que la somme de série entière coïncide avec la fonction sur $] - R; R[$, donc que la fonction est développable en série entière.

Exemples 9

1. Le but de l'exercice est de montrer que la fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \end{cases} \text{ est développable en série entière.}$$

- a. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- b. On suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R \neq 0$, dont la somme est solution de ce problème de Cauchy.

Montrer qu'alors les coefficients a_n doivent vérifier la relation

$$a_1 + 2a_2x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1})x^n = 1$$

- c. En déduire qu'on a
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, a_{2n+1} = \frac{2}{2n+1} a_{2n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0 \end{cases}$$

- d. En déduire que $a_{2n+1} = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$.

- e. Montrer que la série entière de terme général $\frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$ a un rayon de convergence infini et conclure.

2. **KHOLLE** Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

- a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

- b. Montrer que la somme de cette série entière est solution sur $] - R; R[$ de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

- c. Pour $x \in] - R; R[$, déterminer une nouvelle expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.