Chapitre 3 : Exemples corrigés

Exemple 1

1. $\sum z^n$ est une série entière.
   On sait qu'elle converge si et seulement si $|z| < 1$ et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
2. $\sum nx^n$ est une série entière.
   On sait qu'elle converge si $x \in]-1;1[$ et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Corrigé de l'exemple 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$: on a $S_n(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} z^p$.
   Pour $z \neq 1$ on a $S_n(z) = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(z) = \frac{1}{1-z} \iff |z| < 1$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: on a $S_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} px^p$.
   Pour $x = 1$, on a $S_n(1) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} p$ et donc la série numérique correspondante diverge grossièrement.
   Pour $x \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} x^p = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et comme cette fonction est clairement dérivable pour tout $x \neq 1$, on a :
   $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} px^{p-1} = \frac{x^n(nx-n-1)+1}{(x-1)^2}$ et, en multipliant par x les deux membres :
   $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} px^p = \frac{x^{n+1}(nx-n-1)+x}{(x-1)^2}$
   On montre facilement que la suite ainsi définie converge vers $\dfrac{x}{(1-x)^2)} \iff |x| < 1$.

Exemple 2

Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum 2^n x^n$
2. $\sum n^2 z^n$
3. $\sum \frac{z^n}{(2+i)^n}$

Corrigé de l'exemple 2

1. Le terme général de la série est $(2x)^n$: on a donc une série géométrique qui est absolument convergente si $|x| < \dfrac{1}{2}$.
   En outre, pour $|x| > \dfrac{1}{2}$, le terme général $|(2x)^n|$ de la série n'est pas borné.
   On en déduit que $R = \dfrac{1}{2}$.
2. Pour $z \neq 0$, le terme général $\left|n^2 z^n\right|$ n'est pas borné donc la série diverge : on en déduit que $R = 0$.
3. Le même raisonnement qu'au **1.** montre que $R = \sqrt{5}$

Exemples 3

1. On considère la série entière $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^{2n}$.
   a. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n} z^{2n}$. Déterminer la limite de $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$.
   b. En utilisant la règle de d'Alembert, en déduire que le rayon de convergence de la série entière est $\sqrt{\mathrm{e}}$.
2. Donner les rayons de convergence des séries entières $\sum n! z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$.
3. Soit $\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ une fraction rationnelle en n. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$ vaut 1.
4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
   Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :
   a. $\sum a_n^2 z^n$
   b. $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$
   c. $\sum \dfrac{a_n n!}{n^n} z^n$

Corrigé de l'exemple 3

1. **a.** Pour $z \neq 0$, on a $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{(n+1)! n^n |z|^{n+1}}{(n+1)^{n+1} n! |z|^n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n |z|^2$
   On a $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right]$.
   Or, $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{1}{n+1} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   Donc $n \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{n}{n+1} + o(1)$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = -1$.
   La fonction exp étant continue en -1, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$ et donc
   $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|z|^2}{\mathrm{e}}$.
   b. D'après le critère de d'Alembert, on a :
   $$\begin{cases} \text{si } \dfrac{|z|^2}{\mathrm{e}} < 1 \text{ alors la série converge} \\ \text{si } \dfrac{|z|^2}{\mathrm{e}} > 1 \text{ alors la série diverge} \end{cases}$$
   On en déduit que $R = \sqrt{\mathrm{e}}$.
2. Pour $z \neq 0$, on pose $a_n = n! z^n$. On a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = (n+1)|z|$.
   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ puisque $z \neq 0$.
   Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, on a, pour tout $z \neq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ donc la série diverge et $R = 0$. Pour $z \neq 0$, on pose $a_n = \dfrac{z^n}{n!}$. On a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|z|}{n+1}$.

   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$.
   Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, on a, pour tout $z \neq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ donc la série converge et $R = +\infty$.

3. Soit $P(X)=\sum_{k=0}^{d} p_k X^k$ et $Q(X)=\sum_{k=0}^{e} q_k X^k$.

Pour $z\neq 0$, on pose $a_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}z^n$. On a donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\dfrac{P(n+1)Q(n)z^{n+1}}{P(n)Q(n+1)z^n}\right|$.

Au voisinage de $+\infty$, un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré donc :

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \left|\dfrac{p_d(n+1)^d q_e n^e}{p_d n^d q_e (n+1)^e}\right| |z| = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{d-e}|z|$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|z|$.

D'après le critère de d'Alembert, on a :

$\begin{cases} \text{si } |z|<1 \text{ alors la série converge} \\ \text{si } |z|>1 \text{ alors la série diverge} \end{cases}$

On en déduit que $R=1$.

4. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

D'après le critère de d'Alembert, on a donc :

$\begin{cases} \text{si } |z|<R \text{ alors la série converge} \\ \text{si } |z|>R \text{ alors la série diverge} \end{cases}$

Or, le critère de d'Alembert permet aussi d'affirmer que :

$\begin{cases} \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|<1 \text{ alors la série converge} \\ \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|>1 \text{ alors la série diverge} \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{R}$.

a. Soit $z\neq 0$: on pose $b_n=a_n^2 z^n$. On appelle R' le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$.

$\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|^2|z|^2$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\dfrac{|z|^2}{R^2}$.

D'après le critère de d'Alembert, on a :

$\begin{cases} \text{si } \dfrac{|z|^2}{R^2}<1 \text{ alors la série converge} \\ \text{si } \dfrac{|z|^2}{R^2}>1 \text{ alors la série diverge} \end{cases}$

On en déduit que $R'=R$.

b. Soit $z\neq 0$: on pose $b_n=\dfrac{a_n}{n!}z^n$. On appelle R' le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!}z^n$.

$\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\times\dfrac{|z|}{n+1}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|=0$.

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, on a, pour tout $z\neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|<1$ donc la série converge et $R=+\infty$.

c. Soit $z \neq 0$: on pose $b_n = \dfrac{a_n n!}{n^n} z^n$. On appelle R' le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n n!}{n^n} z^n$.

$\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n |z|$ et donc, en utilisant le **1.** de l'exemple 3,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{|z|}{R\mathrm{e}}$.

D'après le critère de d'Alembert, on a :

$$\begin{cases} \text{si } \dfrac{|z|}{R\mathrm{e}} < 1 \text{ alors la série converge} \\ \text{si } \dfrac{|z|}{R\mathrm{e}} > 1 \text{ alors la série diverge} \end{cases}$$

On en déduit que $R' = R\mathrm{e}$.

Exemple 4

On considère la série entière $\sum\limits_{n>0} \dfrac{z^n}{n}$.

Rappeler la nature des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière.

Corrigé de l'exemple 4

Soit R le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n>0} \dfrac{z^n}{n}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente (série harmonique) donc on a $R \leq 1$.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente (série harmonique alternée) donc on a $R \geq 1$.

Finalement, on a $R = 1$.

Exemples 5

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \arctan(n) z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{\ln n}{n^2} z^n$.
3. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{e}^{\cos n} z^n$ est égal à 1.

Corrigé de l'exemple 5

1. On a $\arctan(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ donc le rayon de convergence de la série $\sum \arctan(n) z^n$ est le même que celui de la série $\sum \dfrac{pi}{2} z^n$, soit $R = 1$.
2. Pour n assez grand, on a $\dfrac{\ln n}{n^2} \geq \dfrac{1}{n^2}$. La série entière $\sum \dfrac{1}{n^2} z^n$ a pour rayon de convergence 1 (fraction rationnelle en n) donc en appelant R le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^2} z^n$, on a $R \leq 1$.
   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ donc, pour n assez grand, on a $\dfrac{\ln n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n}$ et le même argument que précédemment permet d'affirmer que $R \geq 1$.
   Finalement, $R = 1$
3. Pour tout entier n, on a $-1 \leq \cos n \leq 1$ et donc $\mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{e}^{\cos n} \leq \mathrm{e}^1$ et le même raisonnement que celui de la question précédente donne $R = 1$.

Exemples 6

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$. Donner l'expression de sa somme et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^2 x^n$. Donner l'expression de sa somme et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$. Donner l'expression de sa somme et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

Corrigé de l'exemple 6

1. Pour tout entier n, le facteur de x^n dans l'écriture de la série entière est un polynôme en n donc $R = 1$.
   Pour tout $x \in]-1;1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
   D'après le cours, cette série entière est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
   Soit, en multipliant par x : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.
   Finalement, pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.
   Enfin, pour $x = \frac{1}{2}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$
2. Pour tout entier n, le facteur de x^n dans l'écriture de la série entière est un polynôme en n donc $R = 1$.
   Pour tout $x \in]-1;1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
   D'après le cours, cette série entière est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
   Soit, en multipliant par x : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ et on remarque que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$.
   D'après le cours, cette série entière est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}$.
   Soit, en multipliant par x : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.
   Finalement, pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.
   Enfin, pour $x = \frac{1}{3}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{(1/3)^2 + 1/3}{(1-1/3)^3} = \frac{3}{2}$.

3. Pour tout entier n, le facteur de x^n dans l'écriture de la série entière est une fraction rationnelle en n donc $R = 1$.
Pour tout $x \in]-1;1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
D'après le cours, cette série entière est continue et admet des primitives sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \alpha = -\ln|1-x| = -\ln(x-1)$ avec $\alpha = 0$
Enfin, pour $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} = -\ln(1/\mathrm{e}-1) = 1-\ln(\mathrm{e}-1)$

Exemples 7

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière autour de 0 et déterminer son développement.
2. Même question avec $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. Même question avec $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
4. Même question avec $x \mapsto \ln(1-x)$

Corrigé de l'exemple 7

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a démontré que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ convergeait si et seulement si $|x| < 1$ et dans ce cas, vers $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
Ainsi, $\frac{1}{1-x}$ est développable en série entière autour de 0, on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et la rayon de convergence R est égal à 1.
2. Un raisonnement analogue montre que $\frac{1}{1+x}$ est développable en série entière autour de 0, on a $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ et la rayon de convergence R est égal à 1.
3. Un raisonnement analogue montre que $\frac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière autour de 0, on a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ et la rayon de convergence R est égal à 1.
4. La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est la primitive de la fonction$x \mapsto \frac{-1}{1-x}$ sur $]-\infty, 1[$ qui s'annule en 1.
On sait qu'une série entière admet admet des primitives dans son intervalle de convergence, et que les séries entières des primitives sont obtenues en intégrant terme à terme.
On a donc $\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Exemples 8

1. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$.

a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

b. Montrer que pour tout x réel, on a $\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$.

c. En déduire que pour x réel, on a $x\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n$.

d. En dérivant l'expression précédente, en déduire que pour x réel, $(1+x)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$ et en déduire enfin une expression simple de la somme de la série entière.

2. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.

b. Pour $x \in]-R;R[$, montrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

c. En déduire une expression simple de la somme de la série entière.

d. Justifier que les séries numériques $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ convergent et calculer leur somme.

3. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.

b. Montrer que pour $x \in]-R;R[$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = x\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

4. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+3n+1\right)x^n$.

 a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.

 b. Vérifier que $n^2+3n+1=(n+1)(n+2)-1$.

 c. En déduire que pour $x\in]-R;R[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+3n+1\right)x^n=-\frac{1}{1-x}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(2)}$ et en déduire la somme de la série entière.

 Remarque :
 Cette méthode peut se généraliser de la façon suivante :
 Pour calculer la somme d'une série entière de terme général $P(n)x^n$, après avoir montré que son rayon de convergence est égal à 1, on écrit $P(n)$ sous la forme :
 $P(n)=\alpha_0+\alpha_1(n+1)+\alpha_2(n+1)(n+2)+\ldots+\alpha_p(n+1)(n+2)\ldots(n+p)$ où Deg $P=p$.
 On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty}P(n)x^n=\alpha_0\left(\frac{1}{1-x}\right)+\alpha_1\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\alpha_2\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(2)}+\ldots+\alpha_p\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p)}$

5. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n+1}{n!}x^n$.

 a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.

 b. Vérifier que $n^2+3n+1=1+4n+n(n-1)$.

 c. En déduire que pour $x\in]-R;R[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n+1}{n!}x^n=\left(1+4x+x^2\right)\mathrm{e}^x$.

 Remarque :
 Cette méthode peut se généraliser de la façon suivante :
 Pour calculer la somme d'une série entière de terme général $\frac{P(n)}{n!}x^n$, après avoir montré que son rayon de convergence est infini, on écrit $P(n)$ sous la forme :
 $P(n)=\alpha_0+\alpha_1 n+\alpha_2 n(n-1)+\ldots+\alpha_p n(n-1)\ldots(n-p+1)$ où Deg $P=p$.
 On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n=\left(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots\alpha_px^p\right)\mathrm{e}^x$.

Corrigé de l'exemple 8

1. **a.** Soit $x\neq 0$ et $n\in\mathbb{N}$. On pose $a_n=\frac{n^2}{n!}x^n$.
 On a donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n+1}{n^2}|x|\underset{+\infty}{\sim}\frac{|x|}{n}$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0<1$.
 D'après le critère de d'Alembert, la série converge pour tout réel x et donc $R=+\infty$.

 b. On sait que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.
 Cette série entière est dérivable à l'intérieur de l'intervalle de convergence et pour tout réel x, on a donc :
 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}$

 c. En multipliant les deux membres de l'égalité par x, on a :
 $x\mathrm{e}^x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n$. Pour $n=0$, on a $\frac{n}{n!}x^n=0$ pour tout réel x donc :
 $x\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n$.

 d. On procède de la même façon :
 $(x+1)\mathrm{e}^x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}$ puis :

$x(x+1)\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$.

Finalement, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = x(x+1)\mathrm{e}^x$.

2. a. Le terme général de la série entière est une fraction rationnelle en n donc $R = 1$.

b. Soit $n \geq 2$: on a $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ donc $\frac{x^n}{n(n-1)} = \frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n}$.

On montre facilement que les séries entières de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n-1}$ on pour rayon de convergence 1.

L'ensemble des séries numériques convergentes est un espace vectoriel donc :

Pour $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

c. On sait que pour $x \in]-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x) + x$.

En outre, on a $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = -x\ln(1-x)$.

Finalement, on a, pour $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = (1-x)\ln(1-x) + x$.

d. Pour $n \geq 2$, la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ est à termes positifs et on a $\frac{1}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Ainsi, la série numérique $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.

On montre de façon analogue que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est absolument convergente donc convergente.

D'après le théorème de prolongement par continuité au bord, on a donc :

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{x \to 1^-} (1-x)\ln(1-x) + x$

En posant $u = 1-x$, on a $\lim_{x \to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim_{u \to 0^+} u\ln(u) = 0$ par croissances comparées et donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

De la même façon, on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x \to -1^+} (1-x)\ln(1-x) + x = 2\ln 2 - 1$.

3. a. Le terme général de la série entière est un polynôme en n donc $R = 1$.

b. Pour $x \in]-1,1[$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Cette série entière est dérivable à l'intérieur de l'intervalle de convergence, et on a :

Pour $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

En multipliant les deux membres de l'égalité par x, on a :

Pour $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Pour $n = 0$, on a $nx^n = 0$ pour tout x de $]-1,1[$ donc :

Pour $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

On recommence le même procédé (dérivation, multiplication par x) et on trouve :

Pour $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = x\frac{1+x}{(1-x)^3}$

4. a. Le terme général de la série entière est un polynôme en n donc $R = 1$.

b. On vérifie très facilement que $n^2+3n+1 = (n+1)(n+2)-1$.

c. Soit $x \in]-1,1[$: on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Cette série entière est de classe C^∞ sur $]-1,1[$: en dérivant deux fois, on a, pour $x \in]-1,1[$:

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(2)}$, soit, après un changement d'indice :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Les séries entière de terme général $(n+1)(n+2)$ et 1 ont un rayon de convergence égal à 1 donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+3n+1\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Finalement, pour $x \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+3n+1\right)x^n = -\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^3}$.

5. a. En utilisant le critère de d'Alembert, on montre facilement que $R = +\infty$.

b. On vérifie facilement que $n^2+3n+1 = 1+4n+n(n-1)$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$: on a $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Cette série entière est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, on a, en calculant la dérivée première de la série entière :

$\displaystyle e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$.

En multipliant par x les deux membres de cette égalité, on a, pour tout réel x :

$\displaystyle xe^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n$.

En calculant la dérivée seconde de la série entière, en multipliant par x^2 et en effectuant un changement d'indice, on trouve :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}x^n = x^2 e^x$.

Les séries entière de terme général $\dfrac{n}{n!}$ et $\dfrac{n(n-1)}{n!}$ ont pour rayon de convergence $+\infty$ et donc, pour tout x réel ,on a :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3n+1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n = \left(1+4x+x^2\right)e^x$.

Exemples 9

1. Le but de l'exercice est de montrer que la fonction

$$f:\left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\end{array}\right.$$ est développable en série entière.

a. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est solution du problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{c} y'-2xy=1\\ y(0)=0\end{array}\right.$$

b. On suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R\neq 0$, dont la somme est solution de ce problème de Cauchy.
Montrer qu'alors les coefficients a_n doivent vérifier la relation

$$a_1+2a_2x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}-2a_{n-1}\right)x^n=1$$

c. En déduire qu'on a $\left\{\begin{array}{c} a_1=1\\ \forall n\geq 1, a_{2n+1}=\dfrac{2}{2n+1}a_{2n-1}\\ \forall n\in\mathbb{N}, a_{2n}=0\end{array}\right.$

d. En déduire que $a_{2n+1}=\dfrac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}$.

e. Montrer que la série entière de terme général $\dfrac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}$ a un rayon de convergence infini et conclure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n=\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}$.

b. Montrer que la somme de cette série entière est solution sur $]-R;R[$ de l'équation différentielle $(1-x^2)y'-xy=1$.

c. Pour $x\in]-R;R[$, déterminer une nouvelle expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}$.

Corrigé de l'exemple 9

1. **a.** f est le produit de la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ (dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes usuels) par la primitive de la fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-t^2}$ qui s'annule en 0 (donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit φ une primitive de $t\mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=2x\times f(x)+\mathrm{e}^{x^2}\times\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)'=2xf(x)+1$ puisque $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.
On a donc $f'(x)-2xf(x)=1$. En outre, il est clair que $f(0)=0$ donc f est bien solution du problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{c} y'-2xy=1\\ y(0)=0\end{array}\right.$$

b. Soit y une série entière de rayon de convergence $R>0$, solution de ce problème de Cauchy.

Pour $x\in]-R,R[$, on pose $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Comme $y(0)=0$, on a $y(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$
y est dérivable à l'intérieur de l'intervalle de convergence et on a

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$$

Ainsi, pour $x \in]-R, R[$, on a $y'(x) - 2xy(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2 a_n x^{n+1}$.

On a donc $a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} 2 a_{n-1} x^n = 1$, et donc :

$a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - 2a_{n-1})\, x^n = 1$

c. On en déduit immédiatement :

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0 \\ a_{n+1} &= \dfrac{2}{n+1} a_{n-1} \forall n \geq 2 \end{cases}$$

On montre très facilement par récurrence que $\forall n \geq 1, a_{2n} = 0$ et comme $a_0 = 0$, on a bien $a_{2n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

En posant $n = 2p+1$ dans la relation de récurrence ci-dessus, on a facilement $a_{2p+1} = \dfrac{2}{2p+1} a_{2p-1}$ donc :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, a_{2n+1} = \dfrac{2}{2n+1} a_{2n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0 \end{cases}$$

d. On montre par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \dfrac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$.

Initialisation : $(n = 0)$

Au rang 0, la propriété s'écrit $a_1 = \dfrac{2^0 \times 0!}{1!} = 1$, ce qui est vrai.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a_{2n+1} = \dfrac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$, et on veut montrer que $a_{2n+3} = \dfrac{2^{2(n+1)}(n+1)!}{(2n+3)!}$.

On sait que $a_{2n+3} = \dfrac{2}{2n+3} a_{2n+1}$ donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$a_{2n+3} = \dfrac{2}{2n+3} \times \dfrac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} = \dfrac{2 \times 2^{2n} n!}{(2n+3)(2n+1)!}$.

Donc $a_{2n+3} = \dfrac{2 \times 2^{2n}(2n+2) n!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \dfrac{2^2 2^{2n} n!(n+1)}{(2n+3)!} = \dfrac{2^{2(n+1)}(n+1)!}{(2n+3)!}$.

Ainsi, la propriété est héréditaire.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \dfrac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$.

e. On montre facilement en utilisant le critère de Riemann que la série entière de terme général $\dfrac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$ a un rayon de convergence infini.

Par unicité de la solution au problème de Cauchy, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

a. Pour $x \neq 0$, on pose $b_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} n$.

On a $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{4^{n+1}\,[(n+1!)]^2\,(2n+1)!}{4^n\,(n!)^2\,(2n+3)!}|x^2| = \dfrac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}|x^2| \underset{+\infty}{\sim} |x^2|$
On en déduit facilement que $R = 1$ d'après le critère de d'Alembert.

b. Pour $x \in]-1,1[$, on a $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Cette série entière est dérivable à l'intérieur de l'intervalle de convergence, et on a, pour tout $x \in]-1,1[$:
$y'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$.
On a donc
$$(1-x^2)\,y'(x) - xy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+2}$$
$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}\,((n+1)!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+2}$$
$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4^{n+1}\,((n+1)!)^2}{(2n+2)!} - \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} - \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} \right) x^{2n+2}$$
$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4^{n+1}\,[(n+1)!]^2 - 4^n(2n+1)(2n+2)(n!)^2 - 4^n(2n+2)(n!)^2}{(2n+2)!} \right) x^{2n+2}$$
Dans cette égalité, et pour $n \geq 0$, le facteur de x^{2n+2} est égal à :
$$\frac{4^n(n!)^2}{(2n+2)!}\left(4(n+1)^2 - (2n+1)(2n+2) - (2n+2)\right) = 0$$
Donc la somme de cette série entière est solution sur $]-R;R[$ de l'équation différentielle $(1-x^2)\,y' - xy = 1$.

c. On résout cette équation différentielle.
Pour $x \neq 0$, l'équation homogène associée s'écrit $y'(x) - \dfrac{x}{1-x^2} = 0$.
Sur $]-1,0[$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies par :
$f(x) = K_1 \exp\left(-\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)\right) = \dfrac{K_1}{\sqrt{1-x^2}}$.
De même sur $]0,1[$, les solutions de l'équation homogène s'écrivent
$f(x) = \dfrac{K_2}{\sqrt{1-x^2}}$.
Si f est solution de l'équation différentielle homogène sur $]-1,1[$ alors elle est continue en 0 et donc $K_1 = K_2$, et la fonction obtenue est bien à la fois continue et dérivable en 0.
Donc les solutions de l'équation homogène sur $]-1,1[$ s'écrivent $f(x) = \dfrac{K}{\sqrt{1-x^2}}$.
On recherche maintenant une solution particulière à l'équation avec second membre à l'aide de la méthode de variation de la constante :
Soit f définie par $f(x) = \dfrac{k(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ une solution, où k est une fonction dérivable sur $]-1,1[$.
On a donc $f'(x) = \dfrac{k'(x)\sqrt{1-x^2} + \dfrac{xk(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$ et $\left(1-x^2\right)f'(x) - xf(x) = k'(x)\sqrt{1-x^2}$
Ainsi, f est solution de l'équation différentielle si et seulement si $k'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Donc $k(x) = \mathrm{Arcsin} x$ convient, et une solution particulière est $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $]-1,1[$ par $y(x) = \dfrac{\mathrm{Arcsin} x + k}{\sqrt{1-x^2}}$.
Or, l'image de 0 par la série entière est 0 donc $k = 0$ et, finalement :
$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = \frac{\mathrm{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$