Chapitre 4 : Exemples corrigés

Exemples 1

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Montrer que le vecteur $u = (2,2,0)$ est un vecteur propre de f.
   De même pour les vecteurs $v = (-1,-2,-1)$ et $w = (-1,-2,1)$.
   La famille $\{u, v, w\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. et $u = (-4,-2,5)$, $v = (4,2,4)$ et $w = (-1,0,1)$.

Corrigé de l'exemple 1

1. On montre facilement que $f(u) = 2u$, $f(v) = v$ et $f(w) = 3w$ donc u, v et w sont des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres respectives 2, 1 et 3.
   $\text{Det}(u, v, w) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ donc la famille (u, v, w) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Dans cette base, la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2. De même, on a $f(u) = -u, f(v) = 8v$ et$f(w) = -w)$. On montre de même que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemples 2

1. Montrer qu'un projecteur, différent de l'application nulle ou de l'application identique, n'admet que 0 ou 1 comme valeurs propres.
2. Montrer qu'une symétrie différente de l'application identique ou de son opposée n'admet que 1 ou -1 comme valeur propre..
3. Déterminer les valeurs propres éventuelles de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 10 & -9 & 3 \\ 14 & -14 & 4 \end{pmatrix}$
5. Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. **(*)** Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On note D l'application qui à une fonction f associe $f' = D(f)$.
   Déterminer les valeurs propres éventuelles de D.

7. **(*)** Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On note P l'application qui à une fonction f associe $F = P(f)$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Déterminer les valeurs propres éventuelles de P.

Corrigé de l'exemple 2

1. Soit f un projecteur : f est donc une application linéaire qui vérifie $f \circ f = f$.
Soit λ une valeur propre de f, et u un vecteur propre associé.
On a donc $f(u) = \lambda u$, et $f \circ f(u) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda^2 u$.
Or, $f \circ f(u) = f(u)$ donc on a $\lambda^2 u = \lambda u$, soit $\lambda(\lambda - 1)u = 0$.
Comme $u \neq 0$ (c'est un vecteur propre!), on a $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. On vient de montrer qu'un projecteur, différent de l'application nulle ou de l'application identique, n'admet que 0 ou 1 comme valeurs propres.
2. Soit f une symétrie : f est donc une application linéaire qui vérifie $f \circ f = Id$.
Soit λ une valeur propre de f, et u un vecteur propre associé.
On a donc $f(u) = \lambda u$, et $f \circ f(u) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda^2 u$.
Or, $f \circ f(u) = u$ donc on a $\lambda^2 u = u$, soit $(\lambda - 1)(\lambda + 1)u = 0$.
Comme $u \neq 0$ (c'est un vecteur propre!), on a $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$.
On vient de montrer qu'une symétrie différente de l'application identique ou de son opposée n'admet que 1 ou -1 comme valeur propre..
3. Soit λ une valeur propre de f, et u un vecteur propre associé.
u est donc une solution non nulle au système associé à l'équation $f(u) = \lambda u$, soit $(f - \lambda Id)(u) = 0$.
Ainsi, λ est une valeur propre de f si et seulement si le système associé n'est pas de rang maximum.
On écrit la matrice associée au système :
$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \underset{(L)}{\sim} \begin{pmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \longleftrightarrow L_1 + L_2 + L_3.$$
On en déduit que si $\lambda = 5$ alors le système n'est pas de rang maximal donc $\lambda = 5$ est une valeur propre de f.
Si $\lambda \neq 5$, alors le système est équivalent à
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \underset{(L)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_2 \longleftrightarrow L_2 - 2L_1.$$
On en déduit que $\lambda = 1$ est une valeur propre de f.
Si $\lambda \neq 1$ alors le système est équivalent à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$.
On en déduit que $\lambda = 3$ est une valeur propre de f.
Finalement, $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 3, 5\}$.
4. On montre de façon analogue que $\mathrm{Sp}(f) = \{-3, 1, 4\}$.
5. De façon analogue on montre que $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$ si $a = b = 0$, et
$\mathrm{Sp}(f) = \left\{0, \sqrt{a^2+b^2}, -\sqrt{a^2+b^2}\right\}$ sinon.
6. **(*)** Soit λ une valeur propre de D, et f un vecteur propre associé.
On a alors $D(f) = \lambda f$, soit $f' = \lambda f$ et donc tous les nombres complexes λ sont des valeurs propres de D, associés respectivement aux vecteurs propres $f\lambda$ définis sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.
7. **(*)** Soit λ une valeur propre de D, et f un vecteur propre associé.
On a alors $P(f) = \lambda f$, soit $F = \lambda f$.

Si $\lambda = 0$ alors $F = 0$ et donc $f = 0$, ce qui est absurde (f est un vecteur propre donc non nul).
Si $\lambda \neq 0$ alors on a $f = \dfrac{1}{\lambda} F$ et on est ramené au problème précédent...
Tous les nombres complexes λ non nuls sont des valeurs propres de P, associés respectivement aux vecteurs propres $f\lambda$ définis sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{x/\lambda}$.

Exemples 3
Calculer le polynôme caractéristique des endomorphismes suivants :

1. u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $f(x, y, z) = (x + 3y + 2z, 3x + 3y + 3z, 2x + 3y + z)$
3. u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exemple 3
Calculer le polynôme caractéristique des endomorphismes suivants :

1. On a $\chi_u(X) = \mathrm{Det}(XId - A) = (X - 6)(X^2 + 3X + 3)$.
2. De même, $\chi_f(X) = \mathrm{Det}(XId - A) = (X + 1)(X - 3 + 3\sqrt{2})(X - 3 - 3\sqrt{2})$.
3. De même, $\chi_u(X) = \mathrm{Det}(XId - A) = (X - 1)^4$.
4. De même, $\chi_u(X) = \mathrm{Det}(XId - A) = X^2(X - 1)^2$.

Exemples 4
Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exemple 4

1. On a $\chi_A(X) = (X-1)^3$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.
2. On a $\chi_A(X) = X(X-1)(X-2)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$.
3. On a $\chi_A(X) = X^2(X+2)(X-6)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 6\}$.
4. On a $\chi_A(X) = (X-3-a)(X-a+1)(X+a-1)^2$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{3+a, a-1, 1-a\}$.

Exemples 5

1. Déterminer les valeurs propres, leur ordre de multiplicité et leur sous-espace propre de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 4 \\ -8 & -6 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
3. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α, leur multiplicité et leur sous-espace propre : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exemple 5

1. Les valeurs propres de la matrice A sont les racines de son polynôme caractéristique. On montre facilement que $\chi_A(X) = \mathrm{Det}(X.Id - A) = (X-1)^2(X-2)(X-3)$ et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1; 2; 3\}$: 1 est une valeur propre de multiplicité 2, 2 et 3 sont des valeurs propres de multiplicité 1.
   Soit E_1 le sous espace propre associé à la valeur propre 1. $E_1 = \mathrm{Ker}(A - Id)$ donc on résout le système :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 4 \\ -8 & -6 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{(L)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{(L)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   On a trois pivots donc 1 paramètre (t).
   Donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 2t_0 \\ z & = & 4t_0 \\ t & = & t_0 \end{array} \right. \quad t_0 \in \mathbb{R})$
   On a donc $E_1 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim E_1 = 1$.
   On montre de même que $E_2 = Ker(A - 2Id) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim E_2 = 1$.

Puis que $E_3 = Ker(A-3Id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et dim $E_3 = 1$.

2. On montre facilement que $\chi_A(X) = \text{Det}(X.Id - A) = (X+1)^2(X-2)$ et donc $\text{Sp}(A) = \{-1;2\}$: -1 est une valeur propre de multiplicité 2, 2 est une valeur propre de multiplicité 1. On trouve ensuite $E_{-1} = Ker(A+Id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et dim $E_{-1} = 2$, et $E_2 = Ker(A-2Id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ et dim $E_2 = 1$

3. On montre facilement que $\chi_{A_\alpha}(X) = \text{Det}(X.Id - A) = (X+1)^2(X-\alpha+1)$. On a donc deux cas à considérer : $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$
Si $\alpha = 0$ alors on a une seule valeur propre de multiplicité 3 et on trouve $E_{-1} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et dim $E_{-1} = 1$.
Si $\alpha \neq 0$ alors -1 est une valeur propre de multiplicité 2 et α est une valeur propre de multiplicité 1.
E_{-1} est le même que dans le cas précédent, et $E_\alpha = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha+1}{\alpha}\\\dfrac{1}{\alpha}\\0\end{pmatrix}\right)$, dim $E_\alpha = 1$.

Exemples 6
Étudier dans chaque cas si la matrice suivante est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 4 & 0\\-4 & 8 & 3\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 1\\1 & 0 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 1\\27 & 0 & -13 & -21\\5 & -2 & 3 & -1\\-10 & 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Corrigé de l'exemple 6
Étudier dans chaque cas si la matrice suivante est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

1. $\chi_{A_1}(X) = X(X-3)(X-5)$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A_1 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{C}$!)

2. $\chi_{A_2}(X) = X(X+2)(X-1)(X-3)$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A_2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{C}$!)

3. $\chi_{A_3}(X) = (X-3)^2\left(X^2+4\right)$, qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A_3 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2i et −2i sont des valeurs propres complexes de multiplicité 1 de A_3 donc dim E_{2i}=dim E_{-2i}=1.

   On montre facilement que $E_3 == Ker(A-3Id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\3\\0\end{pmatrix}\right)$ donc dim $E_3 = 2$.

   Ainsi $\chi_{A_3}(X)$ est scindé sur $\mathbb{C}$ et la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathbb{R}^4$, donc A_3 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
4. $\chi_{A_4}(X) = X\left(X^2+3X+3\right)$, qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A_3 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
En revanche,χ_{A_4} est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A_4 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exemples 7
Trigonaliser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\2 & 1 & -2\\3 & -1 & -2\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 2 & -1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Corrigé de l'exemple 7

1. $\chi_{A_1}(X) = (X+1)(X-1)^2$, qui est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A_1 est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

   On montre que $E_1 = Ker\,(A_1 - Id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ donc dim $E_1 = 1$: la dimension de E_1 est strictement inférieure à la multiplicité de -1 comme valeur propre de A_1 donc A_1 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   De même, on montre que $E_{-1} = Ker\,(A_1 + Id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ donc dim $E_{-1} = 1$.

   On cherche à mettre A_1 sous la forme d'une matrice de Jordan, c'est-à dire qu'on cherche une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle la matrice A_1 devient :

$$T_1 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   Le premier vecteur de cette base vérifie $A_1.v_1 = -v_1$, c'est donc un vecteur propre associé à la valeur propre -1. On prendra $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

   De même,le deuxième est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. On prendra donc $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Le vecteur v_3 vérifie $A_1.v_3 = v_2 + v_3$, soit $(A_1 - Id).v_3 = v_2$: on résout le système associé à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} z_0 \\ -1 \\ z_0 \end{pmatrix}$. On prend $z_0 = 1$ et donc $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On montre que Det $(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ donc la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A_1 a la forme cherchée.

En conclusion, en posant P la matrice constituée des vecteurs (v_1, v_2, v_3) exprimés dans la base canonique, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_1 = P^{-1}.A_1.P$$

2. $\chi_{A_2}(X) = (X-1)^3$, qui est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A_2 est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

On montre que $E_1 = Ker\,(A_2 - Id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc dim $E_1 = 1$: la dimension de E_1 est strictement inférieure à la multiplicité de -1 comme valeur propre de A_2 donc A_2 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Quoiqu'il en soit, il était évident que A_2 n'est pas diagonalisable car elle aurait alors été semblable à la matrice identité (puisque possédant 1 comme seule valeur propre de multiplicité 3), ce qui n'est clairement pas le cas !

On cherche à mettre A_2 sous la forme d'une matrice de Jordan, c'est-à dire qu'on cherche une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle la matrice A_2 devient :

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le premier vecteur de cette base vérifie $A_1.v_1 = v_1$, c'est donc un vecteur propre associé à la valeur propre 1. On prendra $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le vecteur v_2 vérifie $A_2.v_2 = v_1 + v_2$, soit $(A_2 - Id).v_2 = v_1$: on résout le système associé à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} z_0 \\ 1 \\ z_0 \end{pmatrix}$. On prend $z_0 = 1$ et donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur v_3 vérifie $A_2.v_3 = v_2 + v_3$, soit $(A_2 - Id).v_3 = v_2$: on résout le système associé à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} z_0 - 1 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. On prend $z_0 = 1$ et donc $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On montre que Det $(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ donc la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A_2 a la forme cherchée.
En conclusion, en posant P la matrice constituée des vecteurs (v_1, v_2, v_3) exprimés dans la base canonique, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_2 = P^{-1}.A_2.P$$

3. $\chi_{A_3}(X) = (X-2)(X-1)^2$, qui est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A_3 est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
On montre que $E_1 = Ker\,(A_3 - Id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc dim $E_1 = 1$: la dimension de E_1 est strictement inférieure à la multiplicité de 1 comme valeur propre de A_3 donc A_3 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
De même, on montre que $E_2 = Ker\,(A_3 - 2Id) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc dim $E_2 = 1$.
On cherche à mettre A_3 sous la forme d'une matrice de Jordan, c'est-à dire qu'on cherche une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle la matrice A_3 devient :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le premier vecteur de cette base vérifie $A_3.v_1 = 2v_1$, c'est donc un vecteur propre associé à la valeur propre 2. On prendra $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

De même,le deuxième est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. On prendra donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Le vecteur v_3 vérifie $A_3.v_3 = v_2 + v_3$, soit $(A_3 - Id).v_3 = v_2$: on résout le système associé à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} z_0 - 1/2 \\ 1/2 \\ z_0 \end{pmatrix}$. On prend $z_0 = 1$ et donc$v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On montre que Det $(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ donc la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A_3 a la forme cherchée.
En conclusion, en posant P la matrice constituée des vecteurs (v_1, v_2, v_3) exprimés dans la base canonique, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_3 = P^{-1}.A_3.P$$

Exemple 8

1. **a.** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par défini par
$$f(x,y) = \left(\frac{3x+4y}{5}, \frac{4x-3y}{5}\right)$$
Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On la notera A.
   b. Montrer que le vecteur $v_1 = (2,1)$ est vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée ?
   c. Montrer que le vecteur $v_2 = (-1,2)$ est également vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée ?
   d. Déterminer l'image du vecteur $v_3 = (1,3)$.
   e. Montrer que la famille $\{v_1; v_2\}$ forme une base de R^2.
   f. Quelle est la matrice de f dans la base $\{v_1; v_2\}$? On la notera D.
   g. Soit P la matrice dont la première colonne est le vecteur v_1 et dont la deuxième colonne est le vecteur v_2. Calculer P^{-1}.
   h. Quelle relation y-a-t-il entre A, P, P^{-1} et D ?
   i. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Mêmes questions avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = (-3,1)$, $v_2 = (1,1)$ et $v_3 = (0,4)$.

Corrigé de l'exemple 8

1. **a.** La matrice de f dans la base canonique est composée des vecteurs colonnes $f(e_1)$ et $f(e_2)$ exprimés dans la base (e_1, e_2), soit $A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$.
   b. On montre facilement que $f(v_1) = v_1$ donc le vecteur v_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.
   c. De même, $f(v_2) = -v_2$ donc le vecteur v_2 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.
   d. On remarque que $v_3 = v_1 + v_2$ donc comme f est une application linéaire, on a $f(v_3) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = v_1 - v_2 = (3,-1)$.
   e. On montre facilement que $\mathrm{Det}(v_1, v_2) \neq 0$ donc la famille (v_1, v_2) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$: c'est une base de $\mathbb{R}^2$.
   f. La matrice de f dans la base (v_1, v_2) est composée des vecteurs colonnes $f(v_1)$ et $f(v_2)$ exprimés dans la base (v_1, v_2), soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   g. On a $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on obtient facilement $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.
   h. Les formules de changement de bases permettent d'affirmer que $D = P^{-1}.A.P$.
   i. On montre par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$.
   Initialisation : $(n = 0)$:
   Pour $n = 0$, la propriété s'écrit $A^0 = P.D^0.P^{-1}$ ce qui est vrai puisque $A^0 = D^0 = Id$.
   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = P.D^n.P^{-1}$ et on veut montrer que $A^{n+1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$.
   Or, $A^{n+1} = A^n.A = \left(P.D^n.P^{-1}\right).\left(P.D.P^{-1}\right)$ d'après l'hypothèse de récurrence.
   Donc $A^{n+1} = (P.D^n).\left(P^{-1}.P\right).D.P = P.(D^n.D).P^{-1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$.
   Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{4+(-1)^n}{5} & \dfrac{2+2(-1)^{n+1}}{5} \\ \dfrac{2+2(-1)^{n+1}}{5} & \dfrac{1+4(-1)^n}{5} \end{pmatrix}$$

2. On appellera f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.

a. On montre facilement que $f(v_1) = 3v_1$ donc le vecteur v_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3.

b. De même, $f(v_2) = -v_2$ donc le vecteur v_2 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.

c. On remarque que $v_3 = v_1 + v_2$ donc comme f est une application linéaire, on a $f(v_3) = f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 3v_1 - v_2 = (-12, 0)$.

d. On montre facilement que $\mathrm{Det}(v_1, v_2) \neq 0$ donc la famille (v_1, v_2) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$: c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

e. La matrice de f dans la base (v_1, v_2) est composée des vecteurs colonnes $f(v_1)$ et $f(v_2)$ exprimés dans la base (v_1, v_2), soit $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f. On a $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on obtient facilement $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

g. Les formules de changement de bases permettent d'affirmer que $D = P^{-1}.A.P$.

h. On montre par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$.
Initialisation : $(n = 0)$:
Pour $n = 0$, la propriété s'écrit $A^0 = P.D^0.P^{-1}$ ce qui est vrai puisque $A^0 = D^0 = Id$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = P.D^n.P^{-1}$ et on veut montrer que $A^{n+1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$.
Or, $A^{n+1} = A^n.A = \left(P.D^n.P^{-1}\right).\left(P.D.P^{-1}\right)$ d'après l'hypothèse de récurrence.
Donc $A^{n+1} = (P.D^n).\left(P^{-1}.P\right).D.P = P.(D^n.D).P^{-1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$.
Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion :
D'après le principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^{n+1}-(-1)^n}{2} & \dfrac{(-3)^{n+1}+3(-1)^n}{2} \\ \dfrac{3^n-(-1)^n}{2} & \dfrac{(-3)^n+3(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple 9

Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exemple 9
1e étape : On cherche tout d'abord à réduire A.
On a $\chi_A(X) = \mathrm{Det}(XId - A) = (X-2)^3$ et on montre facilement que le sous-espace propre E_2 de A est de dimension 1, engendré par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A n'est donc pas diagonalisable, mais est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
On cherche donc deux vecteurs v_2 et v_3 tels que dans la base (v_1, v_2, v_3), la matrice A devient $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
v_2 vérifie $Av_2 = 2v_2 + v_1$ donc trouver v_2 revient à résoudre le système non homogène $(A - 2Id)v_2 = v_1$.
La matrice augmentée associée à ce système est $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

On trouve $v_2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, on trouve $v_3 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

En posant $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/16 \\ 0 & 1/2 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = P.T.P^{-1}$.

2e étape :
On montre par récurrence la propriété : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = P.T^n.P^{-1}$.
3e étape : Calcul de T^n

On pose $T = D + N$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ donc N est nilpotente d'ordre 3.

Pour $n = 0$ on a $A^0 = Id$, $n = 1$, on a $A^1 = A$ et pour $n = 2$ on a $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -16 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

On montre facilement que D et N commutent, on peut donc appliquer le binôme de Newton pour $n \geq 3$:

$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} D^k N^{n-k}$.

Or, pour $n - k \geq 3$ (soit $k \leq n-3$), on a $N^{n-k} = 0$.

On a donc $T^n = \binom{n}{n-2} D^{n-2}N^2 + \binom{n}{n-1} D^{n-1} + \binom{n}{n} D^n$.

$$T^n = \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (n-1) \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Finalement, on a $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & (n-1)2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & (n-1)2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} (2-n)2^n & (n-1)2^{n-1} & 0 \\ -(n+1)2^{n+1} & n2^n & 0 \\ -(n-1)^2 2^n & \left(n^2-1\right)2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$$

Exemple 10

On considère l'équation de récurrence suivante, pour une suite (u_n) de réels :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}.$$

1. Montrer que l'ensemble E des suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence précédente est un sous-espace vectoriel de S, espace vectoriel des suites réelles.
2. Donner une base de E et en préciser la dimension (on pourra vérifier que l'application $f : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme).
3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Déterminer les valeurs propres de A.
   - **b.** Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
   - **c.** Calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$.
   - **d.** Soit (y) une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
     Montrer que (u) vérifie la relation de récurrence précédente si et seulement si $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier n.
   - **e.** En déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Corrigé de l'exemple 10

1. La suite nulle vérifie la relation de récurrence proposée donc E est non vide.
   Soit (u_n) et (v_n) deux suites de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $(\lambda u + v)_{n+2} = \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda\left(u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}\right) + v_n + \frac{3}{2}v_{n+1}$
   $= (\lambda u_n + v_n) + \frac{3}{2}(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) = (\lambda u + v)_n + \frac{3}{2}(\lambda u + v)_{n+1}$.
   Ainsi, $\lambda u + v \in E$ et donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
2. Soit $f : E \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (u_0, u_1)$.
   Il est évident que f est linéaire.
   Soit u une suite de E telle que $f(u) = (0,0)$. On a donc $u_0 = u_1 = 0$ et on monte facilement par récurrence (forte!) qu'alors $u_n = 0$ pour tout n et donc $u = 0$.
   Ainsi, u est injective.
   Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: on considère la suite de E définie par $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$: on a alors $f(u) = (\alpha, \beta$ et donc f est surjective.
   f est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels et donc $\dim E = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.
3. **a.** On montre facilement que le polynôme caractéristique de A est
   $\chi_A(X) = \left(X + \frac{1}{2}\right)(X-2)$ et $\mathrm{Sp}(A) = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.

   b. Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   On montre facilement que les sous-espaces propres associés respectivement à $-\frac{1}{2}$ et 2 sont engendrés par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont en somme directe donc sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ et la famille $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres.
Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et les formules de changement de base permettent d'affirmer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale.

c. On montre par récurrence (voir exemples précédents) la propriété :
$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^-$ et donc :

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} & 2^{n+1} - (-1)^n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 2^{n+1} - (-1)^n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 2^{n+2} + (-1)^n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \end{pmatrix}$$

d. C'est immédiat !

e. On montre par récurrence (voir exemples précédents) que pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^n X_0$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{5}\left(2^n + (-1)^n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)u_0 + \frac{1}{5}\left(2^{n+1} - (-1)^n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)u_1$$

Exemple 11
Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= x+y+z \\ y' &= 2y+2z \\ z' &= x-y+3z \end{cases}$$

.

Corrigé de l'exemple 11
En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel devient $U'(t) = A.U(t)$.
Première étape : réduction de A
On montre facilement que A possède une seule valeur propre (2), qui est de multiplicité 3.
A est donc trigonalisable sur $\mathbb{R}$, mais non diagonalisable car le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 1, engendré parle vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On cherche deux vecteurs v_2 et v_3 tels que la famille (v_1, v_2, v_3) constitue une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A devienne $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
En procédant comme dans l'exemple 9, on trouve que $v_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ conviennent.
On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\det P = \dfrac{1}{4}$ donc la famille (v_1, v_2, v_3) constitue bien une base de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la matrice A devient T.

En outre, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et les formules de changement de base nous permettent d'affirmer que $T = P^{-1}.A.P$.

Deuxième étape : résolution du système différentiel dans la nouvelle base

Soit $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées de $U(t)$ dans la base (v_1, v_2, v_3).

Dans cette base, le système différentiel devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha'(t) & = & 2\alpha(t) + \beta(t) \\ \beta'(t) & = & 2\beta(t) + \gamma(t) \\ \gamma'(t) & = & 2\gamma(t) \end{array} \right.$$

La troisième équation fournit facilement : $\gamma(t) = K_1 \mathrm{e}^{2t} \qquad (K_1 \in \mathbb{R})$.
On résout la deuxième équation différentielle, c'est-à-dire : $\beta'(t) = 2\beta(t) + K_1 \mathrm{e}^{2t}$.
La solution générale de l'équation homogène est $\beta_0(t) = K_2 \mathrm{e}^{2t} \qquad (K_2 \in \mathbb{R})$.
On cherche maintenant une solution particulière à l'équation différentielle sous la forme $\beta_1(t) = K_2(t)\mathrm{e}^{2t}$ où $K2$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $\beta_1'(t) = K_2'(t)\mathrm{e}^{2t} + 2K_2(t)\mathrm{e}^{2t}$ et donc $\beta_1(t)$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :
$K_2'(t) = K_1$, et $K_2(t) = K_1 t$ convient.
Finalement, on trouve $\beta(t) = (K_1 t + K2)\, \mathrm{e}^{2t}$.
La troisième équation différentielle est donc $\alpha'(t) = 2\alpha(t) + (K_1 t + K2)\, \mathrm{e}^{2t} \qquad (K_2 \in \mathbb{R})$.
En raisonnant de façon strictement analogue, on trouve
$\alpha(t) = \left(\dfrac{K_1}{2} t^2 + K_2 t + K_3 \right) \mathrm{e}^{2t} \qquad (K_3 \in \mathbb{R})$.

Troisième étape : retour à la base initiale

Les formules de changement de base nous permettent d'affirmer que
$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$.
Les solutions du système différentiel sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \mathrm{e}^{2t} \left(\dfrac{K_1}{2} t^2 + \left(K_2 - \dfrac{K_1}{2} \right) t + K_3 - \dfrac{K_2}{2} + \dfrac{K_1}{2} \right) \\ y(t) & = & \mathrm{e}^{2t} \left(\dfrac{K_1}{2} t^2 + K_2 t + K_3 \right) \\ z(t) & = & \mathrm{e}^{2t} \left(\dfrac{K_1}{2} t + \dfrac{K_2}{2} \right) \end{array} \right. \qquad (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$$