Chapitre 4 : Réduction des endomorphismes

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Elements propres et polynôme caractéristique

1.1 Vecteurs propres, valeurs propres

Définition 1 : valeur propre, spectre

Soit u un endomorphisme de E.

1. Un scalaire λ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$.
2. L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le spectre de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$.

Définition 2 : vecteur propre

Soit u un endomorphisme de E.
Un vecteur x non nul de E est dit vecteur propre de u s'il existe une valeur propre λ tel que $u(x) = \lambda x$.
On dit alors que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Remarque :
Un vecteur propre définit une direction stable par l'endomorphisme u.

Exemples 1

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Montrer que le vecteur $u = (2, 2, 0)$ est un vecteur propre de f.
   De même pour les vecteurs $v = (-1, -2, -1)$ et $w = (-1, -2, 1)$.
   La famille $\{u, v, w\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. et $u = (-4, -2, 5)$, $v = (4, 2, 4)$ et $w = (-1, 0, 1)$.

Exemples 2

1. Montrer qu'un projecteur, différent de l'application nulle ou de l'application identique, n'admet que 0 ou 1 comme valeurs propres.
2. Montrer qu'une symétrie différente de l'application identique ou de son opposée n'admet que 1 ou -1 comme valeur propre..
3. Déterminer les valeurs propres éventuelles de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 10 & -9 & 3 \\ 14 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

5. Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. **(*)** Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On note D l'application qui à une fonction f associe $f' = D(f)$.
Déterminer les valeurs propres éventuelles de D.

7. **(*)** Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On note P l'application qui à une fonction f associe $F = P(f)$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Déterminer les valeurs propres éventuelles de P.

Définition 3 : sous-espace propre

On appelle sous-espace propre de l'endomorphisme u associé à la valeur propre λ,noté $E_\lambda(u)$, l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $u(x) = \lambda x$.
Autrement dit, $E_\lambda(u)$ est le noyau de l'endomorphisme $u - \lambda Id_E$

Propriété 1 : structure des sous-espaces-propres

Soit u un endomorphisme de E.
Soit $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé à une valeur propre λ.
Alors $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 2 : somme de sous-espaces-propres

Soit u un endomorphisme de E.
Soit E_1, E_2,...,E_n des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de u.
Alors la somme $E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n$ est directe

1.2 Polynôme caractéristique

Définition 4 : polynôme caractéristique

Soit u un endomorphisme de E.
On appelle polynôme caractéristique de u, noté $\chi_u(X)$, et le polynôme :

$$\chi_u(X) = \det\left(X\mathrm{Id}_E - u\right).$$

Exemples 3
Calculer le polynôme caractéristique des endomorphismes suivants :

1. u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $f(x,y,z) = (x+3y+2z, 3x+3y+3z, 2x+3y+z)$
3. u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété 3 : spectre et polynôme caractéristique

Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines du polynôme caractéristique.

Propriété 4 : trace, déterminant et polynôme caractéristique

1. $\chi_u(X)$ est un polynôme de degré n, de coefficient dominant égal à 1 et de terme constant égal à $\det(u)$.
2. Si $\chi_u(X)$ est scindé, alors la somme des racines comptées avec leur multiplicité est égale à $\text{Tr}(A)$ où A est la matrice de u dans une base quelconque.
3. Si $\chi_u(X)$ est scindé, alors le produit des racines comptées avec leur multiplicité est égale à $(-1)^n \text{ Det}(u)$.

Définition 5 : ordre de multiplicité d'une valeur propre

Soit u un endomorphisme de E.
On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre λ d'un endomorphisme u le plus grand entier k tel que $(X-\lambda)^k$ divise $P_u(X)$. On le note m_λ.

Propriété 5 : mutiplicité et dimension

Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme u alors on a :

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda \leq \dim E$$

Remarque
Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

1.3 Elements propres d'une matrice

Toutes les définitions et les propriétés précédentes (valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, polynôme caractéristique, multiplicité d'une valeur propre...) s'étendent très facilement aux matrices.

Exemples 4

Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exemples 5 <u>**KHOLLE**</u>

1. Déterminer les valeurs propres, leur ordre de multiplicité et leur sous-espace propre de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 4 \\ -8 & -6 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
3. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α, leur multiplicité et leur sous-espace propre : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

2 Endomorphisme et matrices diagonalisables

Définition 6 : endomorphisme et matrice diagonalisable

1. Un endomorphisme est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.
2. Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarques :

— Un endomorphisme u de E est diagonalisable s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

— Diagonaliser une matrice revient à déterminer une base dans laquelle la matrice sera diagonale. Dans une telle base, les termes diagonaux sont les valeurs propres de la matrice.

Propriété 6 : endomorphismes et matrices diagonalisables

Soit u un endomorphisme de E ou M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u ou M est diagonalisable
2. la somme des dimensions des sous-espaces propres de u ou de M est égale à la dimension de E (E est somme directe des sous-espaces propres)
3. le polynôme caractéristique de u (ou de M)est scindé sur $\mathbf{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Remarque

Un endomorphisme (ou une matrice)dont le polynôme caractéristique est scindé et dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.

Exemples 6

Étudier dans chaque cas si la matrice suivante est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 27 & 0 & -13 & -21 \\ 5 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3 Endomorphismes et matrices trigonalisables

Définition 7 : endomorphisme et matrice trigonalisable

1. Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
2. Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Propriété 7 : endomorphismes et matrices trigonalisables

Soit u un endomorphisme de E ou M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u ou M est trigonalisable
2. le polynôme caractéristique de u (ou de M)est scindé sur $\mathbf{K}$.

Remarque
Tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.

Exemples 7
Trigonaliser les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4 Applications de la réduction

4.1 Calcul des puissances d'une matrice

Exemple 8

1. **a.** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par défini par
$$f(x,y) = \left(\frac{3x+4y}{5}, \frac{4x-3y}{5}\right)$$
Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On la notera A.
   b. Montrer que le vecteur $v_1 = (2,1)$ est vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée ?
   c. Montrer que le vecteur $v_2 = (-1,2)$ est également vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée ?
   d. Déterminer l'image du vecteur $v_3 = (1,3)$.

e. Montrer que la famille $\{v_1; v_2\}$ forme une base de R^2.

f. Quelle est la matrice de f dans la base $\{v_1; v_2\}$? On la notera D.

g. Soit P la matrice dont la première colonne est le vecteur v_1 et dont la deuxième colonne est le vecteur v_2. Calculer P^{-1}.

h. Quelle relation y-a-t-il entre A, P, P^{-1} et D ?

i. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Mêmes questions avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = (-3,1)$, , $v_2 = (1,1)$ et $v_3 = (0,4)$.

Exemples 9

Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.2 Suites récurrentes

Exemple 10

On considère l'équation de récurrence suivante, pour une suite (u_n) de réels :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + \frac{3}{2} u_{n+1}.$$

1. Montrer que l'ensemble E des suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence précédente est un sous-espace vectoriel de S, espace vectoriel des suites réelles.
2. Donner une base de E et en préciser la dimension (on pourra vérifier que l'application $f : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme).
3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

c. Calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$.

d. Soit (y) une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Montrer que (u) vérifie la relation de récurrence précédente si et seulement si $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier n.

e. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Exemple 11

Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + y + z \\ y' & = & 2y + 2z \\ z' & = & x - y + 3z \end{array} \right.$$

.