CORRECTION Devoir à la maison n°1

Exercice 1

Partie I

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr}(M) = a+d$ et $\det(M) = ad-bc$.
$M^2 - \operatorname{tr}(M)M + \det(M)I_2 =$
$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$.
$= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd \\ ac+cd-ac-cd & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}), \text{ on a } M^2 - \operatorname{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0.$$

2. Soit A une matrice de trace nulle. D'après 1., on a $A^2 = -\det(A)I_2$ donc A possède la propriété de Dirac.

3. Soit A une matrice qui possède la propriété de Dirac. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$; $A^2 = \alpha I_n$.
D'après 1., on a $\operatorname{tr}(A)A = (\det A - \alpha)\, I_n$.
Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ alors $A = \dfrac{\det A - \alpha}{\operatorname{tr}(A)} I_n$ donc A est une matrice scalaire.
Ainsi, une matrice A qui a la propriété de Dirac est une matrice dont la trace est nulle ou une matrice scalaire.

4. Soit $M \in \mathscr{D}_2$. $\operatorname{tr}(M) = 0$ donc $\exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^3; M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.
$M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
La famille constituée de ces trois matrices est donc génératrice de $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_2$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3; a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Il est immédiat que $a = b = c = 0$ donc cette famille est libre : c'est une base de $\mathscr{D}_2$ qui est donc de dimension 3.

5. **a.** Il est évident que ces trois matrices appartiennent à $\mathscr{D}_2$.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3; aJ + bK + cL = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a donc $\begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Le système $\begin{cases} a & = 0 \\ b+c & = 0 \\ b-c & = 0 \end{cases}$ admet une unique solution : $(a,b,c) = (0,0,0)$.
La famille $\{J, K, L\}$ est une famille libre de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 : c'est une base de $\mathscr{D}_2$.

   b. On montre facilement que :
$J^2 = K^2 = I_2$, $L^2 = -I_2$, $JK = L$, $KJ = -L$, $JL = K$, $LJ = -K$, $KL = -J$ et $LK = J$.
Soit $A = xJ + yK + zL$. $A^2 = (xJ + yK + zL)(xJ + yK + zL) =$
$x^2J^2 + y^2K^2 + z^2L^2 + xy(JK + KJ) + xz(JL + LJ) + yz(KL + LK)$.
On a donc$A^2 = \left(x^2 + y^2 - z^2\right) I_2$.

Partie II

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie la propriété de Dirac et telle que A^2 soit non nulle.
   a. Il existe donc $k \in \mathbb{C}^*$ tel que $A \times A = kI_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{k}A$.
   b. D'après la question précédente, $\left(A^{-1}\right)^2 = \dfrac{1}{k^2}A^2 = \dfrac{1}{k}I_n$ donc A^{-1} possède la propriété de Dirac.
2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A, B et $A+B$ vérifient la propriété de Dirac.
   Il existe donc $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $A^2 = aI_n, B^2 = cI_n$ et $(A+B)^2 = cI_n$.
   Or, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ donc $AB + BA = (c-a-b)I_n$ et $AB+BA$ est donc scalaire.

Partie III

1. On a $M^2 = P^2 = I_4$, $N^2 = -I_4$, et on montre facilement que
   $NP + PN = MN + NM = MP + PM = 0$
   $MN + NM + MP + PM + NP + PN = 0$ est immédiat.
2. Les matrices M, N et P sont de trace nulle, montrons que toute combinaison linéaire de M, N et P est de trace nulle :
   Soit $B \in \mathscr{D}_\Delta : \exists (x,y,z) \in \mathbb{C}^2 ; B = xM + yN + zP$:
   $B = \begin{pmatrix} x & 0 & y+z & 0 \\ 0 & x & 0 & y-z \\ -y+z & 0 & -x & 0 \\ 0 & -y-z & 0 & -x \end{pmatrix}$ et donc $\operatorname{tr}(B) = 0$.
   En utilisant la question I.2.,on déduit que B possède la propriété de Dirac.
   $B^2 = (xM + yN + zP)^2 =$
   $x^2M^2 + y^2N^2 + z^2n^2 + xy(MN+NM) + xz(MP+PM) + yz(NP+PN) = \left(x^2 - y^2 + z^2\right) I_4$.
   En particulier, $A^2 = \left(3^2 - 2^2 + 2^2\right) I_4 = 9I_4$.

Exercice 2

Pour $n \geq 3$, on cherche a, b et c réels tels que $\dfrac{4n-3}{n(n-2)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n-2} + \dfrac{c}{n+2}$.
En multipliant les deux membres de cette égalité par n et en prenant $n = 0$, on a $a = \dfrac{3}{4}$.
En multipliant les deux membres de cette égalité par $n-2$ et en prenant $n = 2$, on a $b = \dfrac{5}{8}$.
En multipliant les deux membres de cette égalité par $n+2$ et en prenant $n = -2$, on a $c = -\dfrac{11}{8}$.
Donc $\dfrac{4n-3}{n(n-2)(n+2)} = \dfrac{3/4}{n} + \dfrac{5/8}{n-2} + \dfrac{-11/8}{n+2}$.
Soit $n \geq 3$: on écrit la somme partielle S_n de la série :
$S_n = \dfrac{3}{4}\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{5}{8}\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k-2} - \dfrac{11}{8}\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k+2}$.
On ré-indice cette somme :
$S_n = \dfrac{3}{4}\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{5}{8}\sum_{k=1}^{n-2} \dfrac{1}{k} - \dfrac{11}{8}\sum_{k=5}^{n+2} \dfrac{1}{k}$.
On réécrit S_n :
$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{5}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k}\right) - \frac{11}{8}\left(\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$S_n = \frac{3}{4} \times \frac{7}{12} + \frac{5}{8} \times \frac{25}{12} + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{11}{8}\right) \sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} + \left(\frac{3}{4} - \frac{11}{8}\right)\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{11}{8}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right)$.

Puisque $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{11}{8} = 0$, on a $S_n = \frac{167}{96} - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{11}{8}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right)$.

Il est alors évident que la suite des sommes partielles Sn converge vers $\frac{167}{96}$.

Donc $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4n-3}{n\left(n^2-4\right)} = \frac{167}{96}$.

Exercice 3

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et soit $a = \mathrm{Arctan}\alpha$, $b = \mathrm{Arctan}\beta$. On a $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $b \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $a - b \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Comme $a - b \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $a - b = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}\right)$, soit :

$\mathrm{Arctan}\alpha - \mathrm{Arctan}\beta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: avec $\alpha = n$ et $\beta = n+1$, on a $\mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(n) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1-n}{1+n(n+1)}\right)$.

Donc $\mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(n) = \mathrm{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}$.

Soit $n > 0$: on écrit la somme partielle S_n de la série :

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Arctan}(k+1) - \mathrm{Arctan}(k))$.

Donc $S_n = \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(0) = \mathrm{Arctan}(n+1)$.

Or, $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Arctan}x = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que la suite des sommes partielles S_n converge vers $\frac{\pi}{2}$.

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}$