TD Chapitre 4 : Réduction

Exercice 1

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que les valeurs propres de A sont -1 et 2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de R^3 dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 3

Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse à l'aide de démonstrations, d'exemples ou de contre-exemples selon le cas.

1. Toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres réelles.
2. Il existe des matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui admettent 2 valeurs propres réelles.
3. Il existe des matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui admettent 2 valeurs propres complexes.
4. Toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ admet 2 valeurs propres complexes distinctes ou non.
5. Il existe des matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui admettent 1 valeur propre réelle et 1 valeur propre complexe non réelle.
6. Il existe des matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui admettent 1 seule valeur propre réelle simple.
7. Il existe des matrices A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui n'admettent pas de valeur propre réelle.

Exercice 5

1. A est une matrice 3×3 dont les valeurs propres sont 1, 2 et 4.
   Démontrer ou infirmer par un contre-exemple les affirmations suivantes :
   — A est inversible.
   — A est diagonalisable.
   — A n'est pas diagonalisable
2. Mêmes questions lorsque les valeurs propres de A sont 2, 2 et 5.

Exercice 6

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Trouver les valeurs propres de A.
   b. La matrice A est-elle inversible ?
   c. Est-elle diagonalisable ?
2. On pose $B = A - 3I_3$.
   a. Calculer B^2, B^4 et B^6 à l'aide de la calculatrice.
   Conjecturer une formule pour B^{2k} pour $k \in \mathbb{N}$.
   De même, conjecturer une formule pour B^{2k+1} pour $k \in \mathbb{N}$.
   b. Ecrire A^n en fonction de n et de B, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

On considère la relation de récurrence suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & -2x_n + \dfrac{3}{2}y_n \\ \\ y_{n+1} & = & -3x_n + \dfrac{5}{2}y_n \end{array}\right. .$$

1. Écrire cette relation sous forme matricielle.
2. Déterminer la solution générale.
3. On suppose que $x_0 = 0$ et $y_0 = -1$. Calculer x_n et y_n en fonction de n.
   Quel est le comportement asymptotique de x_n et de y_n quand n tend vers l'infini ?
4. Même question avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$.
5. Y a-t-il un vecteur d'équilibre non nul ?

Exercice 9

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 10

Soit $z \in \mathbb{C}$ et la matrice $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $M(z)$ soit diagonalisable.

Exercice 11

On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser A.
2. En déduire l'anticommutant de A, c'est-à-dire :
   $$\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : AM + MA = 0\}.$$
3. Déterminer le commutant de A, c'est-à-dire :
   $$\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : AM - MA = 0\}.$$

Exercice 12

Soient les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 11u_n - 4v_n - 8w_n \\ v_{n+1} & = & 8u_n - v_n - 8w_n \\ w_{n+1} & = & 8u_n - 4v_n - 5w_n \end{array}\right. \qquad \text{et par} \qquad u_0 = v_0 = w_0 = 1.$$

Expliciter u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 13

Soit u l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2[X] \\ P & \longmapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u, et, si c'est possible, diagonaliser u.

Exercice 14

Trois produits de consommation courante A_1, A_2 et A_3 sont en concurrence sur le marche. Au 1er janvier 2000, une enquête réalisée sur un échantillon représentatif de consommateurs a donne les résultats suivants :

30 % des personnes interrogées ont déclaré consommer A_1, 50 % A_2 et 20 % A_3.

Ces valeurs seront notées respectivement p_0, q_0 et r_0, et l'on appellera "état initial du marché" le vecteur $X_0 = (p_0, q_0, r_0)$ de $\mathbb{R}^3$.

Les fabricants du produit A_1 lancent une campagne publicitaire d'un mois le 1er janvier 2000.

Une enquête réalisée le 1er février 2000 sur le même échantillon a donne les résultats suivants :

parmi les clients de A_1 au 1er janvier,

— 80 % continuent d'acheter A_1,
— 10 % deviennent acheteurs de A_2,
— 10 % deviennent acheteurs de A_3,

parmi les clients de A_2 au 1er janvier,

— 60 % continuent d'acheter A_2,
— 30 % deviennent acheteurs de A_1,
— 10 % deviennent acheteurs de A_3,

parmi les clients de A_3 au 1er janvier,

— 70 % continuent d'acheter A_3,
— 20 % deviennent acheteurs de A_1,
— 10 % deviennent acheteurs de A_2.

1. On note $X_1 = (p_1, q_1, r_1)$ l'état du marche au 1er février 2000. Montrer qu'il existe une matrice carrée M telle que $X_1 = MX_0$.
2. On suppose que la campagne publicitaire continue et que, mois par mois, ses effets restent identiques à ceux du premier mois. On note $X_n = (p_n, q_n, r_n)$ l'état du marche après n mois de campagne publicitaire. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n.
3. Déterminer les valeurs propres de M.
4. Soit (V_1, V_2, V_3) une base de vecteurs propres de M. Exprimer X_n en fonction de n et des coordonnées de X_0 dans la base (V_1, V_2, V_3) (que l'on ne demande pas de calculer).
5. Quel est l'état du marché quand n tend vers l'infini ?