

Devoir à la maison n°2

CORRECTION

Exercice 1

1. Par définition, f est décroissante sur $I \iff \forall (a, b) \in I \times I, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leq b$:

$$\forall t \in [0; 1], 0 < a + t \leq b + t \text{ donc } \frac{1}{b+t} \leq \frac{1}{a+t}$$

$$\text{Comme } e^t > 0 : \frac{e^t}{b+t} \leq \frac{e^t}{a+t} \text{ donc } \int_0^1 \frac{e^t}{b+t} dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{a+t} dt.$$

On a $f(b) \leq f(a)$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$2. \text{ a. } |f(x) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{e^t}{x_0+t} dt \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x+t} - \frac{e^t}{x_0+t} \right) dt \right|$$

$$\text{On a donc } |f(x) - f(x_0)| \leq \left| \int_0^1 \frac{e^t (x_0 + t - x - t)}{(x_0 + t)(x + t)} dt \right|$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^t (x_0 - x)}{(x_0 + t)(x + t)} \right| dt.$$

$$\text{Comme } x > x_0 > 0, \text{ on a } |f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^1 \frac{e^t (x_0 - x)}{(x_0 + t)(x + t)} dt$$

Pour $t \in [0; 1]$: on a :

$$- e^t \leq e$$

$$- x_0 + t > x_0 > 0 \text{ donc } 0 \leq \frac{1}{x_0 + t} \leq \frac{1}{x_0}.$$

$$- x + t \geq x > \frac{x_0}{2} \text{ donc } 0 < \frac{1}{x_0 + t} \leq \frac{2}{x_0}$$

$$\text{On en déduit que } 0 \leq \frac{1}{(x_0 + t)(x + t)} \leq \frac{2}{x_0^2}.$$

$$\text{Par suite, } |f(x) - f(x_0)| \leq \int_0^1 \frac{2e(x - x_0)}{x_0^2} dt = \frac{2e(x - x_0)}{x_0^2}.$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2e(x - x_0)}{x_0^2} = 0.$$

f est donc continue au point x_0 .

3. Pour $t \in [0, 1]$, on a $x + t \geq x > 0$ donc $0 \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x}$ et $0 < \frac{e^t}{x+t} \leq \frac{e^t}{x}$ car $e^t > 0$.

$$\text{Ainsi, } \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x} dt = \frac{e-1}{x}. \text{ Montrer que pour tout réel } x \text{ strictement positif :}$$

$$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$$

$$\text{Pour } t \in [0, 1], \text{ on a } 0 < x + t \leq x + 1 \text{ donc } 0 \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+t} \text{ et } 0 < \frac{e^t}{x+1} \leq \frac{e^t}{x+t} \text{ car}$$

$$e^t > 0.$$

$$\text{Ainsi, } \int_0^1 \frac{e^t}{x+1} dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt$$

$$\text{On a donc } \frac{e-1}{x+1} \leq f(x).$$

$$\text{Finalement, on a bien } \frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$$

$$\text{On en déduit : } \frac{\frac{e-1}{x+1}}{\frac{e-1}{x}} \leq \frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} \leq 1, \text{ soit } \frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} = 1 \text{ par encadrement.}$$

$$\text{On a bien } f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}.$$

4. a. Pour $x \in [0; 1]$, on a $e^x \leq e$.

La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$, sa dérivée est majorée par e sur ce même intervalle. D'après l'IAF, on en déduit que : $\forall t \in [0; 1], |e^t - 1| \leq et$.

- b. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $0 < e^t - 1 < et$ donc $0 \leq \frac{e^t - 1}{x+t} \leq \frac{et}{x+t}$ car $x+t > 0$

$$\text{Or, comme } x > 0, \frac{et}{x+t} < \frac{e(x+t)}{x+t} = e.$$

$$\text{On a donc } 0 \leq \frac{e^t - 1}{x+t} \leq e \text{ et } 0 \leq \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt \leq \int_0^1 e dt :$$

$$0 \leq g(x) \leq e \text{ et } g \text{ est bien bornée sur } \mathbb{R}_+^*.$$

- c. Comme l'énoncé nous y invite, montrons que pour $x > 0$, on a

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt + g(x).$$

$$\text{Soit } x > 0 : f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt + \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt + g(x).$$

$$\text{On a donc } f(x) = g(x) + [\ln(x+t)]_0^1 = g(x) + \ln(x+1) - \ln x.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{f(x)}{-\ln x} = -\frac{g(x)}{\ln x} - \frac{\ln(x+1)}{\ln x} + 1.$$

$$g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+^* \text{ d'après 4.b. donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{\ln x} = 0.$$

$$\text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 0.$$

$$\text{On en déduit que } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{-\ln x} = 1, \text{ donc } f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x.$$

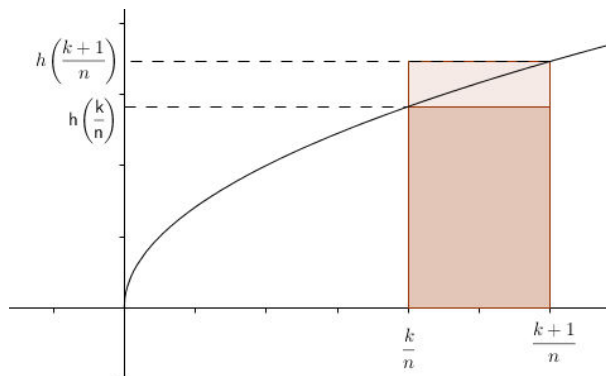
5. a. h est de classe C^∞ sur $[0; 1]$ comme quotient de deux fonctions de classe C^∞ sur $[0; 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; 1]$.

$$\text{Pour } t \in [0; 1], \text{ on a } h'(t) = \frac{e^t(1-t) - e^t}{(1+t)^2} = \frac{te^t}{(1+t)^2} > 0.$$

Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur le segment $[0; 1]$.

- b. $h\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n}$ est l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{n}$ et de hauteur $h\left(\frac{k}{n}\right)$.

$$\text{De même, } h\left(\frac{k+1}{n}\right) \times \frac{1}{n} \text{ est l'aire du rectangle de largeur } \frac{1}{n} \text{ et de hauteur } h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$



Ainsi, u_n est la somme des aires des rectangles situés "sous la courbe", et v_n est la somme des aires des rectangles situés "au-dessus de la courbe".

c. Soit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. La fonction h est croissante sur $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$:

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], h\left(\frac{k}{n}\right) \leq h(t) \leq h\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$\text{On a donc } \int_{k/n}^{(k+1)/n} h\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h\left(\frac{k+1}{n}\right) dt$$

$$\text{Finalement : } \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

d. D'après la question 5.c, on a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

$$\text{On a donc } u_n = \int_0^1 h(t) dt \leq v_n.$$

$$\text{On remarque que } \int_0^1 h(t) dt = f(1), \text{ donc } u_n \leq f(1) \leq v_n.$$

$$\text{Donc } u_n - \frac{u_n + v_n}{2} \leq f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n - \frac{u_n + v_n}{2}, \text{ soit}$$

$$\frac{u_n - v_n}{2} \leq f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{v_n - u_n}{2}.$$

$$\text{On a donc } \left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{|v_n - u_n|}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} \text{ car } u_n \leq v_n.$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

$$\text{Donc } v_n - u_n = \frac{h(1) - h(0)}{n} \text{ et, finalement :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}.$$

e. On cherche un entier n tel que $\frac{h(1) - h(0)}{2n} \leq \frac{10^{-2}}{2}$.

$$\iff n \geq 10^2 (h(1) - h(0)) \iff n \geq \left(\frac{e}{2} - 1\right) \times 10^2 \iff n \geq 36 \text{ A l'aide de la}$$

$$\text{calculatrice, on trouve } \frac{u_{n_0} + v_{n_0}}{2} = 1,125 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$\text{Donc } f(1) = \frac{112}{100} \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Exercice 2**Partie A Étude d'une fonction**

On considère la fonction φ définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

$$1. \text{ Soit } t \in I : \varphi'(t) = \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) + \left(t + \frac{1}{2}\right) \times \frac{\frac{t-(t+1)}{t^2}}{\frac{t+1}{t}}.$$

$$\varphi'(t) = \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) + \left(t + \frac{1}{2}\right) \times \frac{-1}{t(t+1)}.$$

$$\text{Donc } \varphi'(t) = \ln\left(\frac{1+t}{t}\right) - \frac{2t+1}{2t(t+1)}.$$

$$\varphi''(t) = \frac{-1}{t(t+1)} - \frac{2(2t)(t+1) - (2t+1)(4t+2)}{4t^2(t+1)^2}$$

$$\varphi''(t) = \frac{-4t(t+1) - 4t(t+1) + 2(2t+1)^2}{4t^2(t+1)^2}$$

$$\varphi''(t) = \frac{2}{4t^2(t+1)^2} = \frac{1}{2t^2(t+1)^2}$$

$$2. \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1}{t} = 1 \text{ donc, par composition, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) = 0.$$

$$\frac{2t+1}{2t(t+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2t}{2t^2} = \frac{1}{t} \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t+1}{2t(t+1)} = 0.$$

$$\text{Finalement, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = 0.$$

$$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u \text{ donc } \varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} t \times \frac{1}{t} = 1.$$

$$\text{On a donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 1$$

$$3. \forall t \in I, \text{ on a } \varphi''(t) = \frac{1}{2t^2(t+1)^2} > 0 \text{ donc } \varphi' \text{ est strictement croissante sur } I.$$

$$\text{De plus, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = 0 \text{ donc } \varphi'(t) \leq 0 \text{ sur } I.$$

$$4. \forall t \in I, \text{ on a } \varphi'(t) \leq 0 \text{ donc } \varphi \text{ est décroissante sur } I.$$

$$\text{De plus, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 1 \text{ donc } \varphi(t) \geq 1 \text{ sur } I$$

$$5. \text{ On a } \ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \text{ donc :}$$

$$\varphi(t) - 1 \underset{+\infty}{=} \left(t + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) - 1$$

$$\varphi(t) - 1 \underset{+\infty}{=} \left(\frac{2t+1}{2}\right) \left(\frac{6t^2-3t+2}{6t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) - 1$$

$$\varphi(t) - 1 \underset{+\infty}{=} \frac{t+2}{12t^3} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ donc } \varphi(t) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12t^2}.$$

Partie B Formules de Wallis

$$1. u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$$

$$u_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$2. \text{ Soit } n \geq 0 : u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)) dt$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) (-1 + \cos t) dt.$$

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(t) \geq 0$ et $-1 + \cos t \leq 0$ donc $\cos^n(t) (-1 + \cos t) \leq 0$ et, par suite, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos t \geq 0$ donc $\cos^n(t) \geq 0$ et donc $u_n \geq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

$$3. \text{ Soit } n \geq 0 : u_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) dt.$$

On pose $u(t) = \cos^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \cos t$.

On a donc $u'(t) = -(n+1) \sin t \cos^n(t)$ et $v(t) = \sin t$.

u et v sont de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc on utilise la formule d'IPP :

$$u_{n+2} = [\sin t \cos^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^n(t) dt. [\sin t \cos^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} = 0 \text{ et on a}$$

$\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ donc :

$u_{n+2} = (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}$ par linéarité de l'intégrale.

Ainsi, on a $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

$$4. \text{ Soit } n \geq 0 : \text{ on déduit de la question précédente que } u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n.$$

$$\text{Soit } n > 0 : \text{ on a } u_{2n} = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} u_0 = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$u_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)(2n-4)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 2 \cdot 1}{(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\dots 2^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^2 \cdot n^2 \cdot 2^2(n-1)^2 \cdot 2^2(n-2)^2 \dots 2^2 \cdot 1^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{On conjecture donc que } \forall n > 0, u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Cette relation étant également vraie pour $n = 0$, on démontre donc par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Initialisation ($n = 0$)

Au rang 0, la propriété s'écrit $u_0 = \frac{0!}{2^0 (0!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ et $u_0 = \frac{\pi}{2}$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ et on veut montrer que

$$u_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

On sait que $u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} u_{2n}$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)^2 2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } u_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2 2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Conclusion :

$$\text{D'après le principe de récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

On conjecture et on démontre de façon analogue que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

$$5. \text{ Soit } n \in \mathbb{N} : u_{2n} \times u_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \times \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

$$u_{2n} \times u_{2n+1} = \frac{(2n)!}{(2n+1)!} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} \times u_{2n+1} = \ell^2.$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} \times u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2(2n+1)} = 0.$$

Donc $\ell = 0$.

7. Soit $n > 0$: La suite (u_n) est décroissante, donc on a $u_{2n-1} \leq u_{2n} \leq u_{2n+1}$.

$$\text{Comme } u_{2n} > 0 : u_{2n-1} \times u_{2n} \leq (u_{2n})^2 \leq u_{2n+1} \times u_{2n}.$$

$$\text{En utilisant la question précédente : } \frac{\pi}{4n} \leq (u_{2n})^2 \leq \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

$$\text{On montre de même que } \frac{\pi}{2(2n+1)} \leq (u_{2n+1})^2 \leq \frac{\pi}{2(2n+2)}$$

Comme tous ces nombres sont strictement positifs :

$$\frac{2(2n+2)}{\pi} \leq \frac{1}{(u_{2n+1})^2} \leq \frac{2(2n+1)}{\pi}$$

$$\text{On a donc } \frac{2(2n+2)}{4n} \leq \left(\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} \right)^2 \leq 1 \text{ donc } \sqrt{\frac{2(2n+2)}{4n}} \leq \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2(2n+2)}{4n}} = 1 \text{ donc, d'après le théorème des gendarmes : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} = 1 \text{ et } u_{2n} \underset{+\infty}{\sim} u_{2n+1}.$$

8. En utilisant les questions 5. et 7., on a $u_{2n} \times u_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} (u_{2n})^2$ donc

$$(u_{2n})^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n}.$$

$$\text{Finalement, } u_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2n}}.$$

$$\text{On montre de même que } u_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}. \text{ On a bien}$$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

$$\text{On en déduit que } u_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \text{ et finalement :}$$

$$\sqrt{\pi} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}.$$

9. Applications

On considère la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

a. Soit $x \neq 0$: on pose $a_n = \binom{2n}{n} x^n$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} x$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} x = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} x.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 4|x|.$

D'après le critère de d'Alembert, la série diverge si $|x| > \frac{1}{4}$ et converge si $|x| < \frac{1}{4}$
donc $R = \frac{1}{4}.$

b. La série est à termes positifs, et $\binom{2n}{n} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$

On utilise la question 8. : $\frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. Donc la série diverge.

Partie C Formule de Stirling

1. Soit $n \in \mathbb{N}$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1} \times n^n \sqrt{n}}{n!e^n(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}} = \frac{en^n \sqrt{n}}{(n+1)^n \sqrt{n+1}} = e \frac{n^{n+1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = -\ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} \times \frac{1}{e}\right) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1.$$

On en déduit que $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = 1 - \varphi(n).$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = 1 - \varphi(n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$ d'après la question A.5.

Or, $\frac{1}{12n^2}$ est le terme général d'une série convergente donc la série $\sum \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.

3. Soit $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(v_{k+1}) - \sum_{k=1}^n \ln(v_k) = \sum_{k=2}^n \ln(v_k) - \sum_{k=1}^n \ln(v_k) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1).$$

$$v_1 = \frac{1!e}{1\sqrt{1}} = e \text{ donc}$$

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = \ln(v_{n+1}) - 1$$

On en déduit que $\ln(v_{n+1}) = 1 + \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right).$

La série de terme général $\ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)$ est convergente : soit ℓ sa limite.

La suite $(\ln(v_n))$ converge vers $\ell + 1$, et la suite (v_{n+1}) converge vers $C = e^{\ell+1} > 0.$

4. $v_n \underset{+\infty}{\sim} C$ donc $\frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} C$, soit $n! \underset{+\infty}{\sim} C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$

5. La deuxième formule de Wallis affirme que $\sqrt{\pi} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}.$

On utilise la question 4. : $\sqrt{\pi} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n \times C^2 \times n \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{n}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$. On en déduit que

$C \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$, donc $C = \sqrt{2\pi}$.

6. $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

On en déduit la formule de Stirling :

lorsque n tend vers $+\infty$, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$