samedi 9 octobre 2021

CORRIGE DS n°2 CCINP

Exercice 1

1. Pour $n>0$, on a $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}>0$.

De plus, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une série de Rieman convergente.

Donc la série $\sum\limits_{n>0} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

2. On cherche trois réels α, β et γ tels que pour pour tout entier $n>0$, on ait :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par n et pour $n=0$ on a $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

En multipliant les deux membres de cette égalité par $n+1$ et pour $n=-1$ on a $\beta=-1$.

En multipliant les deux membres de cette égalité par $n+2$ et pour $n=-2$ on a $\gamma = \dfrac{1}{2}$.

Donc, pour tout $n>0$, on a $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1/2}{n} + \dfrac{-1}{n+1} + \dfrac{1/2}{n+2}$.

3. Soit $n>0$: on écrit la somme partielle d'ordre n de la série :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$

Donc la série converge vers $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

Voir le corrigé du TD!

Exercice 3

On considère la série entière $f(x)$ de terme général $\dfrac{n^2-2n+3}{n!}x^n$.

1. Pour $x\neq 0$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{n^2-2n+3}{n!}x^n$.

On a $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{\left[(n+1)^2-2(n+1)+3\right]\times n!}{\left(n^2-2n+3\right)\times(n+1)!}|x| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(n+1)^2 n!}{n^2(n+1)!}|x| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n+1}$.
On a donc, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 0 < 1$ donc, d'après le critère de d'Alembert, cette série converge pour tout réel x.
Ainsi, le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$.

2. On sait que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.
D'après le théorème de dérivation des séries entières, on a donc :
$(\mathrm{e}^x)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{x^{n-1}}{n!}$ et donc $x\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\dfrac{x^n}{n!}$.
De même, on a $(x\mathrm{e}^x)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\dfrac{x^{n-1}}{n!}$ et donc $x(x+1)\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\dfrac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2\dfrac{x^n}{n!}$.
Or, toutes ces séries ont le même rayon de convergence, et comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, on a :
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{n!}x^n = \dfrac{n^2}{n!}x^n - 2\dfrac{n}{n!}x^n + 3\dfrac{x^n}{n!})$.
On en déduit que $f(x) = x(x+1)\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^x = \left(x^2-x+3\right)\mathrm{e}^x$.

Exercice 4
On considère l'application définie pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi(P) = (1+X)P' - 2P.$$

1. Montrons que φ est linéaire :
Soit P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ réel :
$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = (1+X)(\lambda P_1 + P_2)' - 2(\lambda P_1 + P_2)$.
L'opérateur de dérivation étant linéaire, on a :
$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda(1+X)P_1' + (1+X)P_2' - 2\lambda P_1 - 2P_2 = \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$ et φ est linéaire.
Montrons que pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a donc $\deg(P) \leq 2$ et $\deg(P') \leq 1$ donc $\deg((X+1)P') \leq 2$ et comme $\deg(2P) \leq 2$, on a bien $\deg\big((X+1)P' - 2P\big) \leq 2$ et donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
Ainsi, φ est est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On montre facilement que $\varphi(1) = -2$, $\varphi(X) = -X+1$ et $\varphi\left(X^2\right) = 0$.
On en déduit que la matrice A de φ dans la base canonique $\left\{1, X, X^2\right\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ un élément du noyau de φ.
On a $\varphi(P) = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On résout le système associé à la matrice A et on trouve facilement que ses solutions sont les triplets (a, b, c) qui vérifient l'égalité $b = c = 0$.
On a donc $P \in \ker(\varphi) \Longleftrightarrow P = aX^2$ et donc une base de $\ker(\varphi)$ est $\left\{X^2\right\}$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 3 - \dim\ker(\varphi)$ donc $\dim\mathrm{Im}(\varphi) = 2$.
En regardant la matrice A, on voit que les polynômes -2 et $1-X$ appartiennent à $\mathrm{Im}(\varphi)$. Ces polynômes constituent une famille libre (ils sont de degré échelonnés) donc la famille $\{-2, 1-X\}$ constituent une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

4. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Initialisation ($n = 1$) :

Au rang 1, on a $A^1 = A$ et $\begin{pmatrix} (-2)^1 & (-1)^1 - (-2)^1 & 0 \\ 0 & (-1)^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

Ainsi, la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on veut montrer que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & (-1)^{n+1} - (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Or, on a $A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & -2.(-1)^n - (-2)^{n+1} + (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Or, $-2.(-1)^n - (-2)^{n+1} + (-1)^n = (-1)^n(-2+1) - (-2)^{n+1} = (-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}$ et donc on a :

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & (-1)^{n+1} - (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la propriété est bien héréditaire.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1. $I_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$

$I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \mathrm{d}x$.

On utilise la formule d'intégration par parties :

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, on a donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[1, \mathrm{e}]$ et on a :

$I_1 = \left[\dfrac{x^2}{2} \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}$

2. Soit $n \geq 1$: on utilise la formule d'intégration par parties :

On pose $u(x) = (\ln x)^n$ et $v'(x) = x$, on a donc $u'(x) = \dfrac{n \ln x}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[1, \mathrm{e}]$ et on a :

$I_n = \left[\dfrac{x^2(\ln x)^n}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} - \dfrac{n}{2}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$, soit :

$$2I_n + nI_{n-1} = \mathrm{e}^2.$$

3. Soit $n \geq 0$. Sur $[1,\mathrm{e}]$, on a $0 \leq \ln x \leq 1$ donc $(\ln x)^n \leq (\ln x)^{n+1}$.
Ainsi, $x(\ln x)^n \leq x(\ln x)^{n+1}$ et donc $I_n \leq I_{n+1}$ et la suite (I_n) est décroissante.

4. Pour $n = 0$, on a $I_0 = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$ et donc $\dfrac{\mathrm{e}^2}{0+3} \leq I_0 \leq \dfrac{\mathrm{e}^2}{0+2}$: la relation est vraie au rang 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$: d'après la question précédente, on a $I_{n-1} \geq I_n$
Donc $2I_n + nI_{n-1} \geq (2+n)I_n$ et comme $2I_n + nI_{n-1} = \mathrm{e}^2$, on a $I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+2}$.
De même, on a $I_{n+1} \leq I_n$ donc $2I_{n+1} + (n+1)I_n \leq (n+3)I_n$ et donc $I_n \geq \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+3}$, et donc la relation est vraie au rang n.
Finalement, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}$$

5. Le théorème des gendarmes montre facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \mathrm{e}^2$