samedi 9 octobre 2021

Devoir surveillé n°2 CCINP

Exercice 1
On considère la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n > 0)$.

1. Justifier que cette série est une série convergente.
2. Déterminer trois réels α, β et γ tels que pour pour tout entier $n > 0$, on ait :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}.$$

3. En déduire la somme de la série.

Exercice 2
On pose $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ pour tout $n \geq 2$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Pour $x \in]-R; R[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
3. Montrer que la fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite en $-R$ et déterminer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Exercice 3
On considère la série entière $f(x)$ de terme général $\dfrac{n^2-2n+3}{n!}x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$.
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4

On considère l'application définie pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi(P) = (1+X)P' - 2P.$$

1. Montrer que φ est est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. En déduire une base du noyau puis de l'image de φ.
4. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^n \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir la relation pour tout tout entier n non nul :

$$2I_n + nI_{n-1} = \mathrm{e}^2 \qquad \textbf{(*)}$$

3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
4. En utilisant la relation **(*)** à deux rangs différents, montrer que pour tout entier n :

$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}$$

.

5. Montrer que les suites (I_n) et (nI_n) sont convergentes et déterminer leur limite.