samedi 9 octobre 2021

CORRIGE DS n°2 CS

Exercice 1

1. Pour $n>0$, on a $\dfrac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}>0$.
De plus, $\dfrac{3n+1}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Rieman convergente.
Donc la série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

2. On cherche trois réels α, β et γ tels que pour pour tout entier $n>0$, on ait :
$$\frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}.$$
En multipliant les deux membres de cette égalité par n et pour $n=0$ on a $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
En multipliant les deux membres de cette égalité par $n+1$ et pour $n=-1$ on a $\beta=2$.
En multipliant les deux membres de cette égalité par $n+2$ et pour $n=-2$ on a $\gamma = -\dfrac{5}{2}$.
Donc, pour tout $n>0$, on a $\dfrac{3n+1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1/2}{n} + \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{5/2}{n+2}$.

3. Soit $n>0$: on écrit la somme partielle d'ordre n de la série :
$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3k+1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$

$S_n = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{5}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$

$S_n = \displaystyle\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \frac{5}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$S_n = \displaystyle\left(\frac{1}{2}+2-\frac{5}{2}\right)\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1+\frac{2}{n+1} - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{7}{4}$
Donc la série converge vers $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{7}{4}$.

Exercice 2
Voir le corrigé du TD !

Exercice 3
On considère la série entière $f(x)$ de terme général $\dfrac{n^2-2n+3}{n!}x^n$.

1. Pour $x\neq 0$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{n^2-2n+3}{n!}x^n$.
On a $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{\left[(n+1)^2-2(n+1)+3\right]\times n!}{\left(n^2-2n+3\right)\times(n+1)!}|x| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(n+1)^2 n!}{n^2(n+1)!}|x| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n+1}$.

On a donc, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 0 < 1$ donc, d'après le critère de d'Alembert, cette série converge pour tout réel x.
Ainsi, le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$.

2. On sait que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.
D'après le théorème de dérivation des séries entières, on a donc :
$(\mathrm{e}^x)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{x^{n-1}}{n!}$ et donc $x\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\dfrac{x^n}{n!}$.
De même, on a $(x\mathrm{e}^x)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\dfrac{x^{n-1}}{n!}$ et donc $x(x+1)\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\dfrac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2\dfrac{x^n}{n!}$.
Or, toutes ces séries ont le même rayon de convergence, et comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, on a :
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{n!}x^n = \dfrac{n^2}{n!}x^n - 2\dfrac{n}{n!}x^n + 3\dfrac{x^n}{n!})$.
On en déduit que $f(x) = x(x+1)\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^x = \left(x^2 - x + 3\right)\mathrm{e}^x$.

Exercice 4

On considère l'application définie pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ par :

$$\varphi(P) = (1+X)P' - 2P.$$

1. Montrons que φ est linéaire :
Soit P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et λ réel :
$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = (1+X)(\lambda P_1 + P_2)' - 2(\lambda P_1 + P_2)$.
L'opérateur de dérivation étant linéaire, on a :
$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda(1+X)P_1' + (1+X)P_2' - 2\lambda P_1 - 2P_2 = \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$ et φ est linéaire.
Montrons que pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a donc $\deg(P) \leq 3$ et $\deg(P') \leq 2$ donc $\deg((X+1)P') \leq 3$ et comme $\deg(2P) \leq 3$, on a bien $\deg\big((X+1)P' - 2P\big) \leq 3$ et donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Ainsi, φ est est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. On montre facilement que $\varphi(1) = -2$, $\varphi(X) = -X+1$, $\varphi\left(X^2\right) = 0$, $\varphi\left(X^3\right) = X^3 + 3X^2$.
On en déduit que la matrice A de φ dans la base canonique $\left\{1, X, X^2, X^3\right\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ un élément du noyau de φ.
On a $\varphi(P) = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On résout le système associé à la matrice A et on trouve facilement que ses solutions sont les quadruplets (a, b, c, d) qui vérifient l'égalité $a = c = d = 0$.
On a donc $P \in \ker(\varphi) \Longleftrightarrow P = aX^2$ et donc une base de $\ker(\varphi)$ est $\left\{X^2\right\}$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Im}(\varphi) = 4 - \dim\ker(\varphi)$ donc $\dim\operatorname{Im}(\varphi) = 3$.
En regardant la matrice A, on voit que les polynômes -2, $1-X$ et $3X^2 + X^3$ appartiennent à $\operatorname{Im}(\varphi)$. Ces polynômes constituent une famille libre (ils sont de degré échelonnés) donc la famille $\left\{-2, 1-X, 3X^2 + X^3\right\}$ constituent une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

4. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Initialisation ($n = 1$) :

Au rang 1, on a $A^1 = A$ et $\begin{pmatrix} (-2)^1 & (-1)^1 - (-2)^1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Ainsi, la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on veut montrer que

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & (-1)^{n+1} - (-2)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Or, on a $A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & -2.(-1)^n - (-2)^{n+1} + (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Or, $-2.(-1)^n - (-2)^{n+1} + (-1)^n = (-1)^n(-2+1) - (-2)^{n+1} = (-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}$ et donc on a :

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & (-1)^{n+1} - (-2)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la propriété est bien héréditaire.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1. $I_1 = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.
   On pose $u(x) = 1-x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, on a donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et d'après la formule d'IPP, on a :
   $I_1 = \left[(1-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = -1 + \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e}-2.$
   Ainsi, $I_1 = \mathrm{e}-2$.
2. Pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leq 1-x \leq 1$ et donc $0 \leq (1-x)^n \leq 1$ donc :
   $0 \leq (1-x)^n \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^x$ et comme sur $[0,1]$, on a $\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}$, on a $0 \leq (1-x)^n \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}$.
   En intégrant cette inégalité, on trouve :
   $$0 \leq I_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n!}$$
   .
3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on a $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.
   On pose $u(x) = \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, et donc $u'(x) = -\frac{(1-x)^n}{n!}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et d'après la formule d'IPP, on a :
   $I_{n+1} = \left[\frac{(1-x)^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}\right]_0^1 + \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$, soit :
   $$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$$
   .

   b. On montre par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \mathrm{e} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$.
   Initialisation$(n=1)$.
   Au rang 1, la propriété s'écrit $I_1 = \mathrm{e} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$ ce qui est vrai car $I_1 = \mathrm{e}-2$.
   Hérédité
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $I_n = \mathrm{e} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et on veut montrer que
   $I_{n+1} = \mathrm{e} - \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{p!}$.
   D'après la question précédente, on a $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence :
   $I_{n+1} = \mathrm{e} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)!} = \mathrm{e} - \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{p!}$.
   Ainsi, la propriété est héréditaire.
   Conclusion
   La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire donc d'après le principe de récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \mathrm{e} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$
4. D'après la question **2.** et en utilisant le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
   donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right) = 0$, soit :
   $$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right)$$
   .